33 Plusieurs variables
Extrema

I. Vecteurs tangents à une partie

Définition 92 *(vecteur tangent)*

Soit X une partie non vide E et $x \in X$. On dit que le vecteur v est un vecteur tangent à X en x lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ et une courbe, de classe $\mathscr{C}^1$, $\gamma : I =]-\varepsilon, \varepsilon[\to E$ telle que, pour tout $t \in I$, $\gamma(t) \in X$ et $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$ (c'est-à-dire qu'il existe une courbe tracée sur X qui passe par x et dont la dérivée en x est le vecteur v). On note $T_x X$ l'ensemble des vecteurs tangents à X en x.

Théorème 35

Soit $g \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ où Ω est un ouvert de E. Soit $X = \{x \in \Omega, g(x) = 0\}$. Si $x \in X$ et $\mathrm{d}g(x) \neq 0$ alors $T_x X = \ker\big(\mathrm{d}g(x)\big)$.
Dans le cas où E est un espace euclidien, on retrouve l'hyperplan orthogonal au gradient de g en x.

Proposition 160 *(cas particuliers)*

→ si $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable en $a = (x_0, y_0)$ alors l'ensemble des vecteurs tangents à la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = f(x, y)$ est le plan d'équation $z = f(x_0, y_0) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\big(y - y_0\big)$.
→ si $f : U \subset E \to \mathbb{R}$ est différentiable sur U et E est euclidien et si X est une ligne de niveau de f (il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $X = \{x \in U, f(x) = k\}$ alors les vecteurs tangents à X en $a \in X$ sont orthogonaux au gradient de f en a.
→ dans le cas particulier d'une surface $(S) : f(x, y, z) = 0$, si $a = (x_0, y_0, z_0) \in S$ alors le plan tangent à S en a a pour équation

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(a)(z - z_0) = 0$$

c'est le plan passant par a et orthogonal à $\nabla f(a)$.

Exercice 1 ***(Navale 2018)***

Soit S la surface d'équation $x^2 - y^2 - z = 1$, P le plan d'équation $x + 2y - z = 0$. Donner l'ensemble des points M de S tels que le plan tangent à S en M soit parallèle à P.

II. Extrema

Définition 93 *(Extrema)*

soit $f : A \subset E \to \mathbb{R}$ (A partie quelconque de E)

→ On dit que f admet un maximum local (resp. minimum local) en $a \in A$ lorsqu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a tel que, pour tout $x \in A \cap \mathcal{V}$, $f(x) \leqslant f(a)$ (resp. $f(x) \geqslant f(a)$).
→ On dit que f admet un maximum global (resp. minimum global) en $a \in U$ lorsque, pour tout $x \in U$, $f(x) \leqslant f(a)$ (resp. $f(x) \geqslant f(a)$).
→ si $f : U \to \mathbb{R}$ admet un extremum local en a et f est différentiable sur **l'ouvert** U alors $df_a = 0$ (on dit que a est un point critique lorsque $df_a = 0$).
→ si f est continue sur un compact K alors f est bornée sur K et ses bornes sont atteintes (donc f admet un maximum et un minimum global sur K).

Exercice 2

Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = x - y + x^3 + y^3$. Montrer que g admet des extrema sur le carré $[0, 1]^2$ et les déterminer.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=x^2+x^2y+y^3$.

1. Montrer que f admet un point critique mais que f n'y atteint pas d'extremum local.
2. Soit $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x^2+y^2\leqslant 1\}$. Montrer que f admet un minimum m et un maximum M sur D. Déterminer les points D où ils sont atteints puis les valeurs de m et M.

Proposition 161 *(Extrema sous une contrainte)*

→ soit $f:\Omega\to\mathbb{R}$ et X une partie de Ω. Si f est différentiable en $x\in X$ et $f_{|X}$ admet un extremum local en x alors, pour tout $v\in T_xX$, on a $\mathrm{d}f(x)\cdot v=0$.
→ Soient f et g sont deux applications de classe $\mathscr{C}^1$ d'un ouvert Ω de E à valeurs réelles, $X=\{x\in\Omega, g(x)=0\}$ et $x\in X$. Si $\mathrm{d}g(x)\neq 0$ et si $f_{|X}$ admet un extremum en x alors $\mathrm{d}f(x)$ est colinéaire à $\mathrm{d}g(x)$.

Exercice 4 ***(TPE MP 2011)***

Soit $A>0$. Quel est le maximum de xyz pour x,y,z dans $\mathbb{R}^+$ tels que $x+y+z=A$? tels que $x+2y+3z=A$?

Proposition 162 *(Condition d'ordre 2)*

soit $f\in\mathscr{C}^2(\Omega,\mathbb{R})$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$

→ on définit, pour tout $x\in\Omega$, $H_f(x)$, matrice hessienne de f en x, la matrice de $S_n(\mathbb{R})$ de terme général $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x)$
→ pour tout $x\in\Omega$, il existe un voisinage de O sur lequel on a

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x)+\langle\nabla f(x),h\rangle+\frac{1}{2}\left\langle H_f(x)\cdot h,h\right\rangle+\mathrm{o}\left(\|h\|^2\right)\\ &= f(x)+{}^t\nabla f(x).h+\frac{1}{t}h.H_f(x).h+\mathrm{o}\left(\|h\|^2\right)\end{aligned}$$

→ si f admet un minimum local en x alors la différentielle de f est nulle en x et $H_f(x)\in S_n^+(\mathbb{R})$,
→ réciproquement, si la différentielle de f est nulle en x et $H_f(x)\in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors f admet un minimum local en x.

III. EXERCICES

EXTREMA

Exercice 5

Soit $f(x,y)=x^3+3xy^2-15x-12y$.

1. Déterminer les points critiques de f.
2. Déterminer les extrema locaux de f sur $\mathbb{R}^2$. La fonction f admet-elle des extrema absolus sur $\mathbb{R}^2$?
3. Déterminer les extrema locaux et absolus de f sur l'ensemble $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 3\}$.

Exercice 6 ***(Mines MP 2017)***

Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose $f(x,y)=xy\ln(x^2+y^2)$ si $(x,y)\neq(0,0)$ et $f(0,0)=0$.

1. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. Étudier les extrema locaux de f.

Exercice 7 ***(CCP MP 2018)***

On définit un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sur $\mathbb{R}^n$. Soit f un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ à valeurs propres strictement positives.

1. Montrer que pour tout $h\in\mathbb{R}^n$ non nul, $\langle f(h),h\rangle>0$.
2. Soit $u\in\mathbb{R}^n$. On définit la fonction g sur $\mathbb{R}^n$ par $g(x)=\frac{1}{2}\langle f(x),x\rangle-\langle u,x\rangle$.
   (a) Montrer que g est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^n$ et expliciter sa différentielle.
   (b) Montrer que g admet un unique point critique en $z_0=f^{-1}(u)$.
   (c) Montrer que g admet un maximum global en z_0 (on pourra étudier le signe de $g(z_0+h)-g(z_0)$).

Exercice 8 ***(Mines MP 2021)***

Soient E un espace euclidien, $\|\,\|$ la norme de cet espace, $\varphi \in E^*$, f la fonction de E dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall x \in E, f(x) = \varphi(x)e^{-\|x\|^2}$. Étudier les extrema de f.

Exercice 9 ***(Mines MP 2017)***

Déterminer les $A \in M_n(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{tA} \in O_n(\mathbb{R})$. Déterminer l'ensemble des vecteurs tangents à $O_n(\mathbb{R})$ en I_n.

Exercice 10 ***(Mines MP 2021)***

Soit $n \geqslant 2$ un entier. Déterminer l'ensemble des vecteurs tangents à $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ en I_n.