32 ENDOMORPHISMES DES ESPACES EUCLIDIENS

Dans ce chapitre E désignera systématiquement un espace euclidien.

I. FORMES BILINÉAIRES, ENDOMORPHISMES, ADJOINT

Propriété 146 *(Écriture d'une forme bilinéaire)*

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et φ une forme bilinéaire. Si X et Y sont les coordonnées de x et y dans $\mathscr{B}$ et A la matrice de terme général $\varphi(e_i, e_j)$ alors $\varphi(x, y) = {}^tXAY$.

- → φ est symétrique si et seulement si A est symétrique
- → si pour tout $X, Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAY = {}^tXBY$ alors $A = B$,
- → si A est antisymétrique ${}^tXAX = 0$ pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Réciproquement, si ${}^tXAX = 0$ pour tout X alors A est antisymétrique. Notamment, si pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX = {}^tXBX$ alors $A - B$ est antisymétrique (ou $A = B$ lorsque A et B sont symétriques).

Propriété 147 *(Endomorphisme)*

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une **base orthonormée** de E, $u \in \mathscr{L}(E)$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$. Pour tout $i, j \in [\![1; n]\!]$, $a_{ij} = \left\langle u(e_i), e_j \right\rangle$.

Propriété 148 *(Adjoint)*

- → si $u \in \mathscr{L}(E)$, il existe un unique endomorphisme de E tel que, pour tout $x, y \in E$, $\langle x, u(y) \rangle = \langle u^*(x), y \rangle$
- → L'application $u \mapsto u^*$ est linéaire, on a $u^{**} = u$, $\ker u^* = (\mathrm{Im}\, u)^\perp$ et $\mathrm{Im}\, u^* = (\ker u)^\perp$

II. ENDOMORPHISMES ORTHOGONAUX

Définition 90 *(Endomorphismes orthogonaux)*

On dit que $f \in \mathscr{L}(E)$ est un endomorphisme orthogonal lorsqu'il vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

- → pour tout $x, y \in E$, $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$,
- → pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$,
- → $u^* \circ u = u \circ u^* = \mathrm{Id}_E$ (ou $u^{-1} = u^*$),
- → l'image de toute base orthonormée est une base orthonormée,
- → il existe une base orthonormée dont l'image par u est une base orthonormée.

On note $O(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux, appelé groupe orthogonal, et $SO(E)$ le groupe spécial orthogonal (ceux de déterminant $+1$).

Propriété 149 *(pour la réduction)*

Soit $f \in O(E)$, alors

- → $\det f = \pm 1$,
- → si $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, alors $\lambda = \pm 1$ et les éventuels sous-espaces propres E_1 et E_{-1} sont orthogonaux,
- → si F est stable par f (et $f(F) = F$), alors $F^\perp$ est stable par f (et les endomorphismes induits sont encore orthogonaux).

III. MATRICES ORTHOGONALES

GÉNÉRALITÉS

Définition 91 *(matrice orthogonale)*

Une matrice M est orthogonale lorsqu'elle vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes
- → M est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ d'un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^n$,
- → ${}^tMM = I_n$ (ou ${}^tM = M^{-1}$),
- → les colonnes de M forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ (ou de $M_{n,1}(\mathbb{R})$),
- → pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|MX\| = \|X\|$.

On note $O(n)$ ou $O_n(\mathbb{R})$ le groupe multiplicatif des matrices orthogonales.

- → soit $f \in \mathscr{L}(E)$, et $\mathscr{B}$ une **base orthonormée** de E. L'application f est orthogonale si et seulement si $M = Mat_{\mathscr{B}}(f)$ est orthogonale.
- → soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E. Si $\mathscr{B}'$ est une seconde base de E, alors $\mathscr{B}'$ est une base orthonormée de E si et seulement si $P_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}$ est orthogonale (et alors $P_{\mathscr{B}'\mathscr{B}} = {}^tP_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}$).

Propriété 150 *(pour la réduction)*

Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$.
- → $\det M = \pm 1$,
- → $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M) \subset \{-1, 1\}$,

CLASSIFICATION EN DIMENSION 2 ET 3

Proposition 151 *(Dimension 2)*

Soit $M \in O_2(\mathbb{R})$, alors
- → soit $\det M = +1$ et il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que
$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = R_\theta,$$
et la matrice est celle d'une rotation vectorielle d'angle θ,
- → soit $\det M = -1$ et il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que
$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix},$$
et la matrice est celle d'une symétrie orthogonale par rapport à la droite $D_{\theta/2}$.

Proposition 152 *(Dimension 3)*

Soit M une matrice de $O_3(\mathbb{R})$, différente de I_3 et $-I_3$. Elle est semblable à l'une des matrices suivantes :

carac.	$\det M = +1$ $\quad \dim E_1 = 1$		$\det M = -1$ $\quad \dim E_1 = 0$ ou 2	
rem.	$\mathrm{tr}\, M = 1 + 2\cos\theta$	cas $\theta = \pi$	$\mathrm{tr}\, M = 1$	$\mathrm{tr}\, M = -1 + 2\cos\theta$
matrice	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
	rotation d'angle θ	symétrie axiale	réflexion orthogonale	rotation-réflexion

MÉTHODE - ÉTUDE D'UNE MATRICE DE $O_3(\mathbb{R})$

1. On vérifie que $M \in O_3(\mathbb{R})$ (les colonnes forment une famille orthonormale),
2. on calcule $\det M$:
   - → si $\det M = +1$: on cherche les vecteurs invariants (axe de la rotation), on cherche l'angle de la rotation par la trace, avec $\operatorname{tr} M = 1+2\cos\theta$, puis le sens de la rotation une fois l'axe orienté par $\vec{v}$: on choisit $\vec{u}$ hors de l'axe - par exemple $\vec{\imath}$ ou un vecteur de la base - et on détermine le signe de $(\vec{u} \wedge M\vec{u}).\vec{v} = [\vec{u}, M\vec{u}, \vec{v}]$.
   - → si $\det M = -1$ et $\operatorname{tr} M = 1$, alors on cherche l'espace invariant E_1. La matrice M est la matrice de la réflexion orthogonal par rapport à E_1
   - → si $\det M = -1$ et $\operatorname{tr} M < 1$, alors on peut considérer $-M$ et se ramener au cas précédent.

CAS GÉNÉRAL

Proposition 153 *(Réduction d'une matrice orthogonale)*

soit $f \in O(E)$. Il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} I_p & & & & \\ & -I_q & & (0) & \\ & & R_{\theta_1} & & \\ & (0) & & \ddots & \\ & & & & R_{\theta_k} \end{pmatrix}$$

p, q ou k étant éventuellement nuls.

Exercice 1

Reconnaître les endomorphismes dont la matrice dans la base canonique est :

a) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$

b) $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

c) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & -4 & 4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{pmatrix}$

Exercice 2

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ usuel, muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3). Déterminer la matrice dans la base canonique de la rotation r d'axe $(1,1,1)$ telle que $r(e_2) = e_3$.

Exercice 3 ***(très classique)***

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice orthogonale. Démontrer que :

1. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2 = n$.
2. $\left|\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| \leqslant n$. On pourra considérer $(AV|V)$, où $V = {}^t(1,\ldots,1)$.
3. $n \leqslant \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}$.

IV. ENDOMORPHISMES SYMÉTRIQUES

Proposition 154 *(endomorphisme symétrique)*

- → un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ est symétrique (ou auto-adjoint) lorsque pour tout $x, y \in E$, $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$. On note $\mathscr{S}(E)$ le sous-espace vectoriel des endomorphismes symétriques de E.
- → soit $f \in \mathscr{L}(E)$, et $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E. L'application f est symétrique si et seulement si $M = Mat_{\mathscr{B}}(f)$ est symétrique.

Propriété 155 *(Réduction)*

Soit $f \in \mathscr{S}(E)$.
- → Les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux,
- → Si F est stable par f, alors $F^{\perp}$ est stable par f (c'est le cas pour un sous-espace propre).

Théorème 34 *(théorème spectral)*

- → soit $f \in \mathscr{S}(E)$. Il existe une base orthonormée de vecteurs propres pour f.
- → soit $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Il existe une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}MP = {}^tPMP = D$ où D est diagonale.

ENDOMORPHISMES SYMÉTRIQUES POSITIFS

Proposition 156 *(Endomorphismes et matrices symétriques positifs)*

Soit $u \in S(E)$ ou $M \in S_n(\mathbb{R})$, on dit que
- → u est symétrique positif lorsque, pour tout $x \in E$, $\langle u(x), x\rangle \geqslant 0$,
- → u est symétrique défini positif lorsque, pour tout $x \in E$ non nul, $\langle u(x), x\rangle > 0$,
- → M est symétrique positive lorsque, pour tout $x \in M_{n1}(\mathbb{R})$, ${}^tXMX \geqslant 0$,
- → M est symétrique définie positive lorsque, pour tout $x \in M_{n1}(\mathbb{R})$ non nul, ${}^tXMX > 0$

On note $S^+(E)$ (resp. $S^{++}(E)$) l'ensemble des endomorphismes symétrique positifs (resp. définis positifs) et $S_n^+(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$ pour les matrices.

Soit $u \in S(E)$.
- → l'endomorphisme u est symétrique positif si et seulement si $\mathrm{Sp}\, u \subset \mathbb{R}^+$,
- → l'endomorphisme u est symétrique défini positif si et seulement si $\mathrm{Sp}\, u \subset \mathbb{R}_+^*$,

Exercice 4

Soient u un vecteur unitaire de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A = I_n - 2U{}^tU$. Montrer que A est orthogonale et déterminer la nature de l'endomorphisme canoniquement associé.

Exercice 5

Diagonaliser dans une base orthonormée :

a) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

Exercice 6

Si $M \in S_n(\mathbb{R})$ vérifie $M^p = I_n$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, que vaut M^2 ?

Exercice 7

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice symétrique réelle de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Prouver que $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2 = \sum_{1\leq k\leq n} \lambda_k^2$.

V. COMPLÉMENTS

CALCULS PARTICULIERS

Proposition 157

Soit u un endomorphisme symétrique de E et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres pour u associée aux valeurs propres $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$. Si $x = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \displaystyle\sum_{i=1}^n y_i e_i$, alors
- → $\left\langle u(x), y\right\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i y_i$ et $\langle u(x), x\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$,
- → $\lambda_1 = \min\{\langle u(x), x\rangle, \|x\| = 1\}$ et $\lambda_n = \max\{\langle u(x), x\rangle, \|x\| = 1\}$

MATRICE ${}^tAA$

Proposition 158

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$
- → ${}^tAA \in S_n^+(\mathbb{R})$,
- → ${}^tAA \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si A est inversible
- → $\operatorname{rg}({}^tAA) = \operatorname{rg}(A)$ et $\ker {}^tAA = \ker A$.

RACINE CARRÉE

Proposition 159 *(Racine carrée)*

Si $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ alors il existe une unique matrice $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$ (et $A = {}^tBB$)

Exercice 8

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(I_n + {}^tA\,A) > 0$.

VI. EXERCICES

ADJOINT

Exercice 9

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\forall x \in E, (u(x)|x) = 0$. Démontrer que $u^* = -u$, puis que $\ker u = (\operatorname{Im} u)^\perp$.

Exercice 10

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\operatorname{Im} f \subset \ker f$. Montrer que $\ker(f + f^*) = \ker f \cap \ker f^*$.

Exercice 11

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u \circ u = 0$. Prouver l'équivalence

$$\operatorname{Im} u = \ker u \text{ si, et seulement si } u + u^* \text{ est bijectif.}$$

Exercice 12

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ et $(f_1, \dots, f_n)$ deux bases orthonormales de E et $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (u(e_i)|f_j)^2 = \operatorname{tr}(u^* \circ u)$.

ENDOMORPHISMES ORTHOGONAUX

Exercice 13

Soit e un vecteur unitaire de $E = \mathbb{R}^3$ et ρ la rotation vectorielle d'axe dirigé par e et d'angle θ. Montrer que

$$\forall V \in E,\ \rho(V) = (\cos\theta)V + (\sin\theta)e \wedge V + (1 - \cos\theta)(e|V)e.$$

Exercice 14 ***(Mines MP 2012)***

Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ possédant deux valeurs propres non réelles et de module 1. Montrer que A est semblable dans $\mathbb{R}$ à une matrice de rotation.

Exercice 15

Soit u un endomorphisme orthogonal d'un espace euclidien E.

1. Montrer que $\operatorname{Im}(Id-u) = \ker(Id-u)^{\perp}$.
2. En déduire que, pour tout $x \in E$, la suite de vecteurs $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où
$$x_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u^k(x)$$
converge vers le projeté orthogonal de x sur $\ker(Id-u)$.

Exercice 16

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in O_n(\mathbb{R})$ telle que 1 n'est pas valeur propre de A. Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose $B_p = \frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p} A^k$. Étudier la convergence des suites (B_p) et (A^p).

Exercice 17

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique.

1. Simplifier, pour $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX$.
2. Montrer que $I_n + A$ est inversible.
3. On pose $B = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)$. Montrer que B est orthogonale.
4. Calculer $\det B$.

ENDOMORPHISMES SYMÉTRIQUES

Exercice 18 ***(CCP MP 2017)***

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geqslant 3$. Soit (a, b) une famille libre de E. On considère l'application $f : x \in E \mapsto \langle a, x\rangle\, a + \langle b, x\rangle\, b$.

1. Démontrer que f est un endomorphisme symétrique de E.
2. Déterminer le noyau et l'image de f.
3. Calculer $f(a+b)$.
4. Déterminer le spectre et une base de vecteurs propres de f.

Exercice 19 ***(Mines MP 2012)***

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien et a unitaire dans E. On note
$$f_a : x \mapsto x - 2\langle a, x\rangle\, a.$$

1. Étudier f_a.
2. Soit $g \in \mathscr{L}(E)$ un isomorphisme conservant la norme. Déterminer $g \circ f_a \circ g^{-1}$.

Exercice 20

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose que la matrice $B = A\,{}^tA - {}^tA\,A$ a toutes ses valeurs propres positives. Montrer que $B = 0$.

Exercice 21

Si f est un endomorphisme symétrique de E, on note $\lambda(f)$ la plus petite valeur propre de f et $\mu(f)$ la plus grande.

1. Montrer que $\mu(f) = \max\limits_{\|x\|=1} \langle f(x), x\rangle$ et $\lambda(f) = \min\limits_{\|x\|=1} \langle f(x), x\rangle$.
2. Montrer que, si f et g sont symétriques, alors $\mu(f+g) \geq \mu(f) + \lambda(g)$.

Exercice 22

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tAA = A\,{}^tA$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$.

1. Montrer que ${}^tAA = 0$.
2. En déduire que $A = 0$.

Exercice 23

Soit E un espace euclidien de dimension n et soit u un endomorphisme symétrique de E de valeurs propres $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$.

1. Trouver les vecteurs $x \in E$ tels que $(x|u(x)) = \lambda_n \|x\|^2$.
2. On suppose qu'il existe une base orthonormale $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ dans laquelle la matrice de u a tous ses coefficients positifs. Montrer que, si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ est un vecteur propre de u pour la valeur propre λ_n, il en est de même de $y = \sum_{i=1}^{n} |x_i| e_i$. Montrer également que, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, on a $0 \leqslant |\lambda_i| \leqslant \lambda_n$.

MATRICES SYMÉTRIQUES POSITIVES

Exercice 24

Soit $S \in S_n^+(\mathbb{R})$. Déterminer $\max\{\operatorname{tr}(\Omega.S), \Omega \in O_n(\mathbb{R})\}$.

Exercice 25 ***(Mines MP 2010)***

Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $1 + (\det A)^{1/n} \leqslant (\det(I_n + A))^{1/n}$.

Exercice 26

Soit A et B deux matrices symétriques réelles de taille n dont les valeurs propres sont positives ou nulles.

1. On suppose que toutes les valeurs propres de A sont strictement positives.
   - → Montrer qu'il existe une matrice C symétrique, réelle et à valeurs propres strictement positives telle que $A = C^2$.
   - → Montrer que $M = C^{-1}BC^{-1}$ est symétrique, réelles et que ses valeurs propres sont positives.
   - → En déduire $\det(A+B) \geqslant \det A + \det B$.
2. Montrer que l'inégalité reste vraie si les valeurs propres de A sont simplement positives ou nulles.

Exercice 27

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ définie et positive.

1. Montrer que $\det A \leqslant \left(\frac{\operatorname{tr} A}{n}\right)^n$.
2. Montrer que pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, on a $a_{ii} > 0$.
3. Soit D la matrice diagonale de coefficients diagonaux $d_{ii} = \frac{1}{\sqrt{a_{ii}}}$. En étudiant $B = DAD$, montrer que $\det A \leqslant \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Exercice 28 ***(Décomposition polaire)***

1. Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique couple (U, S) où U est orthogonale et S symétrique définie positive tel que $M = US$. On pourra utiliser l'existence d'une racine carrée définie positive de ${}^tMM$.
2. Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est un compact et que S_n^+ est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$.
3. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $U \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^+$ telles que $M = US$.