31 VARIABLES ALÉATOIRES

I. VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

Définition 82 *(Variable aléatoire discrète)*

- → Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On appelle variable aléatoire discrète (vad), toute application $X : \Omega \to E$ telle que
  - $X(\Omega)$ est un ensemble au plus dénombrable - on notera $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$.
  - pour tout $x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{T}$.
- → On dit que X est une variable aléatoire discrète réelle lorsque $E = \mathbb{R}$.
- → Pour tout $A \subset E$, $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in A\} = \bigcup_{x \in A \cap X(\Omega)} X^{-1}(\{x\})$ est un événement ($A \cap X(\Omega)$ est au plus dénombrable).
- → On note $(X = x)$ l'événement $X^{-1}(\{x\})$. Si $E = \mathbb{R}$, on note $(X \leqslant x) = X^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \leqslant x\}$. De même on définit $(X < x), (X \geqslant x)\ldots$.
- → si $X : \Omega \to E$ est une vad et $f : E \to F$ (quelconque) alors $f \circ X : \Omega \to F$ est une vad.
- → on appelle système complet d'événements associé à X, le système complet d'événements $\{(X = x_i), i \in I\}$ si $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$.

Définition 83 *(Loi d'une vad)*

- → soit X une vad. La loi $\mathscr{L}$ de X est la donnée :
  - des valeurs de X : $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$,
  - des probabilités associées : pour tout $i \in I$, $p_i = \mathbb{P}\left(X = x_i\right)$.

  On note $X \hookrightarrow \mathscr{L}$ ou $(X \sim \mathscr{L})$ pour dire que X suit la loi $\mathscr{L}$.
- → X et Y suivent la même loi (noté $X \sim Y$) lorsque $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega' \to E$, $X(\Omega) = Y(\Omega') = \{x_i, i \in I\}$ et pour tout $i \in I$, $\mathbb{P}\left(X = x_i\right) = \mathbb{P}\left(Y = x_i\right)$.
- → Si X est une vad, alors on définit une probabilité sur $(\Omega' = X(\Omega), \mathcal{T}' = \mathscr{P}(\Omega'))$ en posant

$$\mathbb{P}_X : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{T}' & \to & E \\ A & \mapsto & \mathbb{P}(X \in A) \end{array} \right.$$

- → Si $X \sim Y$ avec $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega' \to E$ et $f : E \to F$ alors $f(X) \sim f(Y)$.
- → loi conditionnelle : si $B \in \mathcal{T}$ non négligeable, on définit $\mathbb{P}_{X/B} : A \mapsto \mathbb{P}_B(X \in A)$
- → si X est une vad réelle, la *fonction de répartition de* X est la fonction $x \mapsto \mathbb{P}(X \leqslant x) = \sum_{x_i \leqslant x} \mathbb{P}\left(X = x_i\right)$. Cette fonction est croissante sur $\mathbb{R}$, de limite nulle en $-\infty$, 1 en $+\infty$.

Théorème 30 *(Existence d'une probabilité)*

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable ($\mathcal{T}$ infini) et X une vad sur $(\Omega, \mathcal{T})$ avec $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$. Si on se donne un germe de probabilité (une famille $\{p_n, n \in \mathbb{N}\}$ avec $p_n \geqslant 0$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} p_n = 1$), alors il existe une probabilité $\mathbb{P}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = x_n) = p_n$.

II. FAMILLES DE VARIABLES ALÉATOIRES

Proposition 140 *(Vecteurs aléatoires)*

- → $X : \omega \in \Omega \mapsto (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)) \in E^n$ est une vad si et seulement si pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$, $X_i : \Omega \to E$ est une vad
- → toute fonction de deux vad ($X + Y$, $X.Y$ si le produit existe…) est une vad
- → l'ensemble des vad sur Ω dans l'espace vectoriel E est un espace vectoriel.

Définition 84 *(Loi conjointe, lois marginales)*

soient X, Y deux vad sur Ω. On appelle :
- → loi conjointe de (X, Y) : la donnée
  - valeurs $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$,
  - probabilités $p_{ij} = \mathbb{P}\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$.
- → lois marginales : les lois de X et de Y
- → lois conditionnelles : si $\mathbb{P}(X = x) > 0$, la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$:
  - valeurs $Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$,
  - pour tout $j \in J$, $\mathbb{P}_{X=x}\left(Y = y_j\right) = \mathbb{P}\left(Y = y_j | X = x\right)$.

  on peut conditionner par les événements $X > x$... lorsqu'ils ne sont pas négligeables.

On a les relations :
- → conjointe/conditionnelle : $p_{ij} = \mathbb{P}\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right) = \mathbb{P}\left(Y = y_j | X = x_i\right).\mathbb{P}\left(X = x_i\right)$,
- → conjointe vers marginale : $\mathbb{P}\left(Y = y\right) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}\left(Y = y \cap X = x\right)$.

Définition 85 *(Indépendance)*

- → Pour deux vad :
  - X et Y sont deux vad indépendantes lorsque, pour tout $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$, $\mathbb{P}\left((X = x) \cap (Y = y)\right) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}\left(Y = y\right)$.
  - Si $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$ alors pour tout $A \subset E, B \subset F$, $\mathbb{P}(X \in A \cap Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B)$. Les vad $f(X)$ et $g(Y)$ sont encore indépendantes (f et g fonctions quelconques sur E et F).
- → pour n vad $X_1, \ldots, X_n$:
  - Les vad $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes lorsque pour tout $(x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbb{P}((X_1 = x_1) \cap \cdots \cap (X_n = x_n)) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_n = x_n)$.
  - on a alors $\mathbb{P}((X_1 \in A_1) \cap \ldots \cap (X_n \in A_n)) = \mathbb{P}(X_1 \in A_1) \times \ldots \times \mathbb{P}(X_n \in A_n)$
  - lemme des coalitions : si $(X_1, \ldots, X_n)$ sont indépendantes alors $f(X_1, \ldots, X_k)$ et $g(X_{k+1}, \ldots, X_n)$ sont indépendantes (et généralisation à plusieurs fonctions)
- → pour une suite de vad $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$: lorsque toute sous-famille finie est indépendante.

III. LOIS USUELLES

Propriété 141 *(Loi binomiale)*

- → on répète n fois de suite une expérience de Bernoulli de paramètre p et on compte le nombre de succès.
- → $X(\Omega) = [\![0; n]\!]$ et $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.
- → si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ si et seulement si $X = X_1 + \ldots + X_n$ où $X_1, \ldots, X_n$ sont n vad indépendantes telles que $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.
- → si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$ sont indépendantes alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n + m, p)$.

Propriété 142 *(Loi géométrique (sur $\mathbb{N}^*$))*

- → on effectue une infinité d'expériences de Bernoulli indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$ et on appelle X le rang du premier succès : $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.
- → on a $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{P}(X = k) = pq^{k-1}$ (où $q = 1 - p$) ainsi que $\mathbb{P}(X > k) = q^k$ si $k \in \mathbb{N}$.
- → caractérisation (« loi sans mémoire ») : si X est une vad à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ alors $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ si et seulement si, pour tout $k, n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}_{X>n}(X > n + k) = \mathbb{P}(X > k)$.

Propriété 143 *(Loi de Poisson)*

- → $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ (avec $\lambda \geqslant 0$) : $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.
- → si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ sont indépendantes alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

IV. ESPÉRANCE ET MOMENTS D'ORDRES SUPÉRIEURS

Définition 86 *(Espérance)*

- si X est une vad à valeurs positives, on note $\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x) \in [0, +\infty]$.
- si X est une vad réelles, on dit que X est d'espérance finie lorsque $\{x\mathbb{P}(X = x), x \in X(\Omega)\}$ est sommable et on note alors $\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x) \in \mathbb{R}$.
- théorème de transfert : soit $X : \Omega \to E$ une vad et $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$. La vad $f(X)$ admet une espérance finie si et seulement si $\{f(x)\mathbb{P}(X = x), x \in X(\Omega)\}$ est sommable et alors $\mathbb{E}\big(f(X)\big) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X = x)$.
- si $|X| \leqslant Y$ et Y est d'espérance finie alors X aussi et $|\mathbb{E}(X)| \leqslant \mathbb{E}(|X|) \leqslant \mathbb{E}(Y)$.
- on a $\mathbb{E}(\lambda X) = \lambda \mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$ si X et Y sont d'espérance finie.
- on dit que X est centrée si elle est d'espérance finie et $\mathbb{E}(X) = 0$. Si X est d'espérance finie m alors $X - m$ est centrée.
- si X et Y sont des vad réelles indépendantes alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Définition 87 *(Moments, variance)*

soit X une vad réelle

- X admet un moment d'ordre k si X^k admet une espérance.
- si X admet un moment d'ordre n alors elle admet un moment d'ordre k pour tout $k \in [\![0 ; n]\!]$
- si X, Y ont un moment d'ordre 2 alors XY est d'espérance finie et $|\mathbb{E}(XY)|^2 \leqslant \mathbb{E}\big(X^2\big)\mathbb{E}\big(Y^2\big)$. La vad $X + Y$ admet également un moment d'ordre 2 (et on a une structure d'espace vectoriel sur les vad réelles qui admettent un moment d'ordre 2).
- si X admet un moment d'ordre 2, on note $\mathrm{V}(X) = \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))^2\big)$ (variance) et $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{V}(X)}$ (écart-type). X est réduite lorsque sa variance est 1.
- Si X admet un moment d'ordre 2 :
  - $\mathrm{V}(X) = \mathbb{E}\big(X^2\big) - \mathbb{E}(X)^2$,
  - $\mathrm{V}(aX + b) = a^2\mathrm{V}(X)$
  - $\dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

Définition 88 *(Covariance)*

Soient X, Y deux vad réelles. On note

- $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
- Si X et Y sont indépendantes alors $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$
- $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\mathrm{Cov}(X, Y)$.
- $\mathrm{Cov}(X, X) = V(X)$.

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des vad réelles

- $V(X_1 + \ldots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$
- si $X_1, \ldots, X_n$ sont deux à deux indépendantes alors $V(X_1 + \ldots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$.

V. FONCTION GÉNÉRATRICE

Définition 89 *(Fonction génératrice)*

Soit X une vad à valeurs dans $\mathbb{N}$. On définit $G_X(t) = \mathbb{E}\big(t^X\big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)\, t^n$.

- G_X est la somme d'une série entière de rayon de cv $R \geqslant 1$
- G_X est continue sur $[-1, 1]$ et la série de fonctions converge normalement sur $[-1, 1]$. Elle caractérise la loi d'une vad entière puisque $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$.
- X admet une espérance finie si et seulement si G'_X admet une limite finie en 1 et $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$.
- X admet un moment d'ordre 2 si et seulement si G''_X admet une limite finie en 1. On a alors $\mathrm{V}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$.
- si X et Y sont indépendantes alors $G_{X+Y} = G_X.G_Y$.

VI. SYNTHÈSE DES LOIS

modèle	nom	$X(\Omega)$	loi	espérance	variance	$G_X(t)$
équiprobabilité	uniforme sur $\{x_1,\dots,x_n\}$	$\{x_1,\dots,x_n\}$	$\mathbb{P}\left(X=x_i\right)=\frac{1}{n}$			
équiprobabilité	uniforme sur $\{1,\dots,n\}$	$\{1,\dots,n\}$	$\mathbb{P}\left(X=x_i\right)=\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	
succès/échec	Bernoulli $\mathcal{B}(p)$	$[\![0;1]\!]$	$\mathbb{P}(X=0)=q=1-p, \mathbb{P}(X=1)=p$	p	pq	$tp+q$
nombre de succès	Binomiale $\mathscr{B}(n,p)$	$[\![0;n]\!]$	$\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	npq	$(tp+q)^n$
rang du premier succès	géométrique $\mathcal{G}(p)$	$\mathbb{N}^*$	$\mathbb{P}(X=k)=pq^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{pt}{1-qt}$
événements rares	Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{P}(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	λ	λ	$\exp(\lambda(t-1))$

VII. INÉGALITÉS ET APPROXIMATIONS

Proposition 144 *(inégalités)*

- **Inégalité de Markov** : si X est une vad positive qui admet une espérance alors, pour $a>0$, $\mathbb{P}(X\geqslant a)\leqslant\dfrac{\mathbb{E}(X)}{a}$
- **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev** : si X a un moment d'ordre 2, alors $\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)|\geqslant\varepsilon)\leqslant\dfrac{V(x)}{\varepsilon^2}$.
- **loi faible des grands nombres** : si (X_n) est une suite de vad 2 à 2 indépendantes de même loi, admettant un moment d'ordre 2 (espérance m et écart-type σ), alors en posant $S_n=X_1+\ldots+X_n$, on a $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{S_n}{n}-m\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$ (de limite nulle lorsque n tend vers $+\infty$).

Proposition 145 *(Approximation)*

Si $X_n\hookrightarrow\mathcal{B}(n,p_n)$ avec $np_n\to\lambda$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{P}(X_n=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$.

VIII. QUELQUES DÉMONSTRATIONS

SOMMATION PAR PAQUET

Théorème 31 *(Sommation par paquets - cas positif)*

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs. On suppose que I est réunion disjointe d'ensembles I_λ pour $\lambda\in\Lambda$ avec Λ au plus dénombrable. On a **équivalence** entre

- $(u_i)_{i\in I}$ est sommable
- pour tout $\lambda\in\Lambda$, $(u_i)_{i\in I_\lambda}$ est sommable de somme $s_\lambda=\sum\limits_{i\in I_\lambda}u_i$, et la famille $(s_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est sommable

On a alors $\sum\limits_{i\in I}u_i=\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}\left(\sum\limits_{i\in I_\lambda}u_i\right)$.

Démonstration :

- sens réciproque : soit J une sous-famille finie de I. Il existe un nombre finie d'indices $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ tels que cette famille soit contenue dans $\bigcup\limits_{i=1}^{k}I_{\lambda_i}$. On note alors $J_i=I_{\lambda_i}\cap J$. On a

$$\sum_{j\in J}u_i=\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j\in I_{\lambda_i}}u_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{k}s_{\lambda_i}\leqslant\sum_{\lambda\in\Lambda}s_\lambda.$$

  Ce dernier terme étant constant, on a prouvé que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable et que $\sum\limits_{i\in I}u_i\leqslant\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}\left(\sum\limits_{i\in I_\lambda}u_i\right)$.
- sens direct : Puisque $I_\lambda\subset I$, la famille $(u_i)_{i\in I_\lambda}$ est évidemment sommable. Il reste à montrer que les sommes finies des s_λ sont majorées. Soient $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ un ensemble fini de ces indices (dans Λ). On veut montrer que $\sum\limits_{i=1}^{p}s_{\lambda_i}\leqslant\sum\limits_{i\in I}u_i$. Puisque chaque terme s_{λ_i} peut contenir une infinité de termes de la famille des u_i, ce n'est pas immédiat. Considérons alors des sous-ensembles finis quelconques $J_{\lambda_1},\dots,J_{\lambda_p}$ d'indices avec $J_{\lambda_i}\subset I_{\lambda_i}$.

Pour toutes ces familles finies, la réunion $\bigcup_{i=1}^{p} J_{\lambda_i}$ est finie donc

$$\sum_{j=1}^{p} \sum_{i\in J_{\lambda_j}} u_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i.$$

Fixons les indices 1 à $p-1$:

$$\sum_{j=1}^{p} \sum_{i\in J_{\lambda_j}} u_i = \sum_{j=1}^{p-1} \left(\sum_{i\in J_{\lambda_j}} u_i \right) + \sum_{i\in J_{\lambda_p}} u_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i.$$

Cette relation est valable pour toute sous-famille $J_{\lambda_p} \subset I_{\lambda_p}$. En passant à la borne supérieure lorsqu'on décrit les parties finies de I_{λ_p}, on a

$$\sum_{j=1}^{p-1} \left(\sum_{i\in J_{\lambda_j}} u_i \right) + s_{\lambda_p} \leqslant \sum_{i\in I} u_i.$$

On fait de même pour les autres termes et on obtient $\sum_{j=1}^{p} s_{\lambda_j} \leqslant \sum_{i\in I} u_i$. Finalement, la famille $(s_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est sommable et sa somme est majorée par $\sum_{i\in I} u_i$.

Lorsque l'une des deux conditions est vérifiée, les deux le sont et on obtient les deux inégalités donc l'égalité entre les deux sommes.

ESPÉRANCE

Théorème 32 *(théorème de transfert)*

Soit $X : \Omega \to E$ une v.a.d. et $f : E \to \mathbb{R}$. La variable aléatoire $Y = f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $\left\{f(x)\mathbb{P}(X=x)\right\}_{x\in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas, on a $\mathbb{E}\left(f(X)\right) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X=x)$.

Démonstration :

- → On note $X(\Omega) = \{x_i\}_{i\in I}$ et $Y(\Omega) = \{y_j\}_{j\in J}$. La variable aléatoire Y est d'espérance finie si et seulement si la famille $\{y_j\mathbb{P}\left(Y=y_j\right)\}_{j\in J}$ est sommable.
- → Pour $j \in J$, on note $I_j = \{i \in I, f(x_i) = y_j\}$. On a alors, $(Y = y_j) = (f(X) = y_j) = \biguplus_{i\in I_j} (X = x_i)$.
- → si $j \in J$, on a
$$|y_j|\mathbb{P}\left(Y=y_j\right) = |y_j| \sum_{i\in I_j} \mathbb{P}\left(X=x_i\right) = \sum_{i\in I_j} |f(x_i)|\mathbb{P}\left(X=x_i\right).$$
- → Puisque $I = \biguplus_{j\in J} I_j$, et que $s_j = \sum_{i\in I_j} |f(x_i)|\mathbb{P}\left(X=x_i\right) = |y_j|\mathbb{P}\left(Y=y_j\right)$ existe, la famille $\left\{f(x_i)\mathbb{P}\left(X=x_i\right)\right\}_{i\in I}$ est sommable si et seulement si la famille $\{s_j\}_{j\in J}$ est sommable.
- → On peut alors écrire, par sommation par paquet

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I} f(x_i)\mathbb{P}\left(X=x_i\right) &= \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} f(x_i)\mathbb{P}\left(X=x_i\right)\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} y_j\mathbb{P}\left(X=x_i\right)\right)\\ &= \sum_{j\in J} y_j \left(\sum_{i\in I_j} \mathbb{P}\left(X=x_i\right)\right) = \sum_{j\in J} y_j\mathbb{P}\left(Y=y_j\right) = \mathbb{E}(Y)\end{aligned}$$

En résumé, l'idée est de regrouper sur des paquets de x_i sur lesquels $f(x)$ est constante.

Remarque : on obtient entre autre que X est d'espérance finie si et seulement si $|X|$ est d'espérance finie (avec pour f la valeur absolue ou le module).

Théorème 33 *(Majoration)*

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. Si $|X| \leqslant Y$ et si Y est d'espérance finie, alors X est aussi d'espérance finie.

Démonstration : Soit Y une vad qui admet une espérance finie et $Y(\Omega) = \{y_j\}_{j\in J}$. La famille $\left(y_j\mathbb{P}\left(Y=y_j\right)\right)_{j\in J}$ est sommable de somme $\mathbb{E}(Y)$. On veut montrer que la famille $\left(x_i\mathbb{P}\left(X=x_i\right)\right)_{i\in I}$ est sommable, c'est-à-dire que $(|x_i|\mathbb{P}\left(X=x_i\right))_{i\in I}$ est sommable.

On note $X(\Omega) = \{x_i\}_{i\in I}$. Le problème est que les événements $(X = x_i)$ et $(Y = y_j)$ ne sont pas liés. On ne peut que travailler sur les intersections. Considérons les événements $A_{ij} = \left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$.

- → si $|x_i| > y_j$ alors $A_{ij} = \emptyset$, $\mathbb{P}\left(A_{ij}\right) = 0$ et $x_i\mathbb{P}\left(A_{ij}\right) = 0 \leqslant y_j\mathbb{P}\left(A_{ij}\right)$,
- → si $|x_i| \leqslant y_j$, alors $|x_i|\mathbb{P}\left(A_{ij}\right) \leqslant y_j\mathbb{P}\left(A_{ij}\right)$.

Dans tous les cas, on a, pour tout $(i,j) \in I \times J$, $0 \leqslant |x_i| \mathbb{P}\left(A_{ij}\right) \leqslant y_j \mathbb{P}\left(A_{ij}\right)$.

On vérifie alors que la famille $\left\{y_j \mathbb{P}\left(A_{ij}\right)\right\}_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable par sommation par paquets. Pour $j \in J$ fixé, la famille $\left\{y_j \mathbb{P}\left(X = x_i \cap Y = y_j\right)\right\}_{i\in I}$ est sommable de somme $y_j \mathbb{P}\left(Y = y_j\right)$ (la famille des $(X = x_i)$ est un système complet d'événements). La famille $\left\{y_j \mathbb{P}\left(Y = y_j\right)\right\}_{j\in J}$ est sommable par hypothèse. La famille $\left\{x_i \mathbb{P}\left(X = x_i \cap Y = y_j\right)\right\}_{(i,j)\in I\times J}$ est donc sommable. En sommant par paquets d'abord par rapport à j, on obtient que la famille de terme

$$s_i = \sum_{j\in J} |x_i| \mathbb{P}\left(X = x_i \cap Y = y_j\right) = |x_i| \mathbb{P}\left(X = x_i\right)$$

est sommable.

IX. EXERCICES

VARIABLES ALÉATOIRES, ESPÉRANCE, VARIANCE

Exercice 1 ***(CCP 95)***

Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

1. Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées. On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.
   (a) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
   (b) Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.
2. Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Déterminer la loi de Y.

Exercice 2

Une urne contient initialement n jetons blancs et un jeton noir. On tire avec remise un jeton de l'urne. Après chaque tirage, on rajoute un jeton blanc. On note X le rang du tirage du premier jeton noir. Déterminer la loi de X et vérifier que c'est bien une variable aléatoire. Est-elle d'espérance finie ?

Exercice 3 ***(TPE MP 2019)***

Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.

1. Trouver $m \in \mathbb{R}$ minimisant $x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{E}\big((X-x)^2\big)$.
2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. On suppose que $\mathbb{P}(X \in [a,b]) = 1$. Montrer que $\mathrm{V}(X) \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{4}$.

Exercice 4 ***(CCP MP 2017)***

On lance une pièce une infinité de fois. On considère les événements P_k : « obtenir pile au lancer k » et F_k : « obtenir face au lancer k ».On note $p = \mathbb{P}(P_k)$ et $q = \mathbb{P}(F_k)$. On note L_1 le nombre de termes de la première série de lancers identiques et L_2 le nombre de termes de la seconde série identique. Par exemple pour la suite $PPFFFFPF\ldots$ alors $L_1 = 2$ et $L_2 = 4$.

1.
   (a) Caractériser l'événement $(L_1 = k)$ et déterminer sa probabilité.
   (b) Déterminer $G_{L_1}(t)$ (G_{L_1} est la fonction génératrice de L_1). Déterminer $\mathbb{E}(L_1)$.
   (c) Calculer $\mathbb{P}(L_2 = \ell)$. Les deux variables L_1 et L_2 ont-elles la même loi ?
2. On se place maintenant dans le cas de n lancers.
   (a) Calculer $\mathbb{P}(L_1 = n)$ puis $\mathbb{P}(L_1 = k)$.
   (b) Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kx^{k-1}$.
   (c) Calculer $\mathbb{E}(L_1)$.

Exercice 5 ***(CCP MP 2019)***

On considère une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n. On tire simultanément p jetons dans l'urne. On note X la variable aléatoire donnant le plus grand numéro tiré et Y celle donnant le plus petit.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \frac{k!}{(k-p)!} = \frac{(n+1)!}{(p+1)(n-p)!}$.
2. (a) Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
   (b) En déduire que, pour tout $k \in X(\Omega), \mathbb{P}(X = k) = \dfrac{(n-p)!k!p}{n!(k-p)!k}$.
   (c) Calculer l'espérance de X.
3. (a) Donner la loi de Y.
   (b) Montrer que $p\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X)$.

Exercice 6

Soient A et B deux boîtes contenant respectivement deux jetons marqués 0 et deux jetons marqués 1. On extrait au hasard un jeton de A et un jeton de B et on les échange. On répète cette opération. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la somme des numéros contenus dans A après n échanges.

1. Déterminer la loi de X_1.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $X_{n+1}(\Omega)$ puis $\mathbb{P}(X_{n+1} = k)$ en fonction de $\mathbb{P}(X_n = 1)$.
3. Déterminer la loi de X_n.
4. Déterminer $\mathbb{E}(X_n)$.

Exercice 7

Deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ suivent une même loi et sont indépendantes. On note $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$.

1. Exprimer les lois de U et V en fonction des lois de X et Y.
2. Dans le cas où X et Y suivent une loi géométrique de paramètre p, calculer la loi de U et de V. Reconnaître la loi de U et calculer leur espérance.

Exercice 8

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On tire n boules avec remise et on note X le plus grand des numéros tirés. Déterminer la loi de X, calculer son espérance et déterminer la limite de $\frac{\mathbb{E}(X)}{N}$ lorsque $N \to +\infty$.

Exercice 9

On considère un tournoi de n participants ($n \geqslant 2$) où le vainqueur est le joueur qui a obtenu le plus de points. On note X_i la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui est égale au nombre de points obtenus par le joueur i à l'issue du jeu. On suppose que ces v.a. sont indépendantes et identiquement distribuée de fonction de répartition F. On note V_n l'événement : « il y a un unique vainqueur ».

1. Montrer que $P(V_n) = n \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = k) F(k-1)^{n-1}$.
2. On suppose que X_1 ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Déterminer la limite de $P(V_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$. Commenter.
3. On suppose que X_1 suit la loi uniforme sur $[\![0; m]\!]$. Déterminer la limite de $P(V_n)$ lorsque m tend vers $+\infty$. Commenter.

Exercice 10

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire successivement des jetons avec remise après chaque tirage. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir pour la première fois deux numéros distincts. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Exercice 11 ***(CCP MP 2018)***

Chaque semaine on achète une boîte de gâteaux qui contient une pièce d'un puzzle. Le puzzle comporte au total N pièces et chaque pièce est équiprobable dans une boîte. On note Y_k la variable aléatoire qui désigne le nombre de semaines pour avoir une k-ième nouvelle pièce à partir du moment où on vient d'obtenir la $k-1$-ième.

1. Les Y_k sont-ils mutuellement indépendants ? Quelle est la loi de Y_1 ?
2. Donner la loi de Y_k, son espérance et sa variance.
3. On introduit X la variable aléatoire comptant le nombre total de semaine nécessaire pour compléter le puzzle.
   (a) Exprimer X à l'aide des Y_k puis exprimer son espérance en fonction de $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
   (b) En utilisant une comparaison série-intégrale, donner un équivalent de H_n.
   (c) En déduire un équivalent de $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 12 ***(Mines MP 2021)***

Une urne contient b boules blanches et a boules argentées, indiscernables au toucher. On tire les boules, une et à une et sans remise, et on note X la variable aléatoire correspondant au nombre de tirages nécessaires pour tirer toutes les boules blanches.

1. Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leqslant q$. Montrer que $\sum_{k=p}^{q} \binom{k}{p} = \binom{q+1}{p+1}$.
2. Établir la loi de X.
3. Donner l'espérance et la variance de X.

Exercice 13 ***(Centrale MP 2019)***

1. Montrer que $X^3 - X^2 - X - 1 = (X-a)(X-b)(X-\overline{b})$ avec $a \in]1,2[$, $b \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ et $|b| < 1$.
2. On lance une infinité de fois une pièce équilibrée. On note p_n la probabilité pour que la séquence PPP apparaisse pour la première fois au n-ième lancer. Exprimer p_{n+3} en fonction de p_n, p_{n+1}, p_{n+2}
3. Donner une expression et un équivalent de p_n.

COUPLES DE VARIABLES ALÉATOIRES

Exercice 14 ***(CCP 98)***

Une secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n correspondants distincts. On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est $p (p \in]0,1[)$. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X. Justifier.
2. La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
   (a) Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P(Y = k|X = i)$.
   (b) Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.
   (c) Déterminer l'espérance et la variance de Z.

Exercice 15 ***(CCINP MP 2021)***

1. Soient X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, $p \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = n) = \dfrac{p}{n}\mathbb{P}(X = n-1)$. Déterminer la loi de X.
2. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant les lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
   (a) Calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{1+X_1}\right)$.
   (b) Donner la loi de $X_1 + X_2$.
   (c) Déterminer la loi de X_1 sachant $X_1 + X_2 = n$. Préciser l'espérance et la variance.
3. Soient X_1, X_2, X_3 des variables aléatoires indépendantes suivant les lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. On pose $U = X_1 + X_2$ et $V = X_2 + X_3$. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de (U, V) : $\rho(U, V) = \dfrac{\mathrm{Cov}(U, V)}{\sigma(U)\sigma(V)}$

Exercice 16

Le nombre de personnes se présentant à un bureau de poste suit une loi de Poisson de paramètre λ. Une personne vient au bureau pour un envoi avec une probabilité p ou pour une autre opération avec une probabilité $q = 1 - p$. Chaque personne n'effectue qu'une seule opération et cela indépendamment les unes des autres. On note X le nombre de personnes qui viennent pour effectuer un envoi et Y le nombre de personnes qui viennent pour autre chose.

1. Déterminer la loi de X, son espérance et variance.
2. Montrer que X et Y sont indépendantes.
3. Calculer $\mathrm{Cov}(X, N)$ et $\rho_{X,N}$.

Exercice 17

On considère une suite de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes $N, X_1, \dots, X_k, \dots$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
On suppose que N est une variables aléatoires réelles à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ possédant un moment d'ordre 2 et que les variables aléatoires X_i (pour $i \in \mathbb{N}^*$) suivent la même loi que X où X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ possédant un moment d'ordre 2. On note $Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$ c'est-à-dire

$$\forall \omega \in \omega, Y(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega).$$

1. Déterminer l'espérance $E(Y)$ en fonction de $E(X)$ et $E(N)$.
2. Déterminer $E(Y^2)$ en fonction de $E(X), V(X), E(N)$ et $E(N^2)$.
3. En déduire $V(Y)$ en fonction des espérances et variances de X et N.
4. Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n et on dispose d'une pièce de monnaie qui donne le côté pile avec une probabilité p. Un joueur tire un jeton dans l'urne et lance la pièce la nombre de fois indiqué sur le jeton. Calculer la moyenne et la variance de la v.a. comptabilisant le nombre de pile obtenu.

Exercice 18 ***(CCP MP 2017)***

On définit l'univers Ω par l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, n\}$ (où $n \in \mathbb{N}^*$), chaque permutation étant équiprobable. Soit σ un élément de Ω, on définit la variable aléatoire X_k par $X_k(\sigma) = 1$ si $\sigma(k) = k$ (k est un point fixe) et 0 sinon. On note N le nombre de points fixes de σ.

1. Que dire de X_k ? Calculer son espérance et sa variance.
2. Calculer $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$.
3. Exprimer N en fonction des X_k.
4. En déduire $\mathbb{E}(N)$, $\mathrm{V}(N)$ et commenter.

SÉRIES GÉNÉRATRICES

Exercice 19

Soient X et Y deux variables indépendantes suivant une loi de Poisson de même paramètre a. On note $Z = X + 3Y$.

1. Déterminer la fonction génératrice de Z.
2. En déduire l'espérance et la variance de Z.
3. Retrouver le résultat d'une autre façon.

Exercice 20

On effectue des lancers d'une pièce équilibrée et on s'arrête à l'apparition de deux piles successifs. On note X le nombre de lancers jusqu'à l'arrêt.

1. On note a_n le nombre de n tirages n'ayant jamais deux piles consécutifs et se terminant par face, et b_n le nombre de n tirages n'ayant jamais deux piles consécutifs et se terminant par pile. Calculer a_n et en déduire la loi de X.
2. On définit les nombres de Fibonacci par $F_0 = F_1 = 1$, et pour $n \geqslant 2$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ et la série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n$. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière et calculer $f(x)$. En déduire la valeur de $\sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)$ et calculer l'espérance de X.

Exercice 21

Soit $k > 0$ et $a \in \mathbb{R}$. On considère une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\mathbb{P}(X = n) = k\left(\dfrac{a}{a+1}\right)^n$

1. Déterminer les réels k et a pour lesquels X est une variable aléatoire.
2. On considère n variables indépendantes X_k de même loi que X et $S = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Déterminer la fonction génératrice de S et en déduire son espérance et sa variance.
3. On pose $Y = X + 1$. Déterminer la loi de Y et retrouver l'espérance et la variance de X et de S.

Exercice 22 ***(Centrale MP 2021)***

Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles. On suppose que $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$.
Soit $\phi_X : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{itx_n} \mathbb{P}(X = x_n)$

1. Montrer que ϕ_X est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Exprimer $\phi_X(t)$.
3. On suppose que X possède un moment d'ordre 2. Montrer que ϕ_X est de classe $\mathscr{C}^2$. Exprimer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$ à l'aide de ϕ_X.

APPROXIMATION

Exercice 23 ***(CCP 99)***

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé Tchebychev.
2. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$. Prouver que : $\forall a \in]0, +\infty[, \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \frac{\mathrm{V}(Y_1)}{na^2}$.
3. **Application** : on effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre 0,35 et 0,45 ?
   Indication : Considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du $i^{\text{ième}}$ tirage.

Exercice 24

1. Soit X une variable aléatoire réelle bornée. Montrer que, pour $d \in \mathbb{R}$,
$$\mathbb{P}(X \geqslant d) \leqslant \inf_{t>0} \frac{\mathbb{E}\left(e^{tX}\right)}{e^{td}}.$$
2. Soit $p \in]0, 1[$ et X_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale $B(n, p)$. Que donne l'inégalité précédente pour X_n et $d = \alpha n$?

Exercice 25

1. Soit Y une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ telle que $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$. On suppose que Y admet une espérance. Montrer que
$$E(Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y \geqslant k).$$
2. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X < k)$.
   (a) Déterminer un équivalent simple u_n de S_n lorsque n tend vers $+\infty$, puis de $S_n - u_n$.
   (b) On suppose que $E(X^2)$ existe. Montrer que $S_n = n - E(X) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$.

DIVERS

Exercice 26 ***(Centrale MP 2021)***

On pose, pour $x \in \mathbb{R}, \gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ et l'on admet que $\int_{\mathbb{R}} \gamma = 1$.

1. Montrer que l'intégrale est bien définie.
   Soit $\left(X_k\right)_{k \geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes avec $\mathbb{P}\left(X_i = 1\right) = \mathbb{P}\left(X_i = -1\right) = \frac{1}{2}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*, S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} X_k$.
2. Soit $P = X^p$ avec p entier impair. Montrer que $\mathbb{E}(P(S_n)) = \int_{\mathbb{R}} P(t)\gamma(t)\mathrm{d}t = 0$.
3. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $\mathbb{E}(Q(S_n)) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} Q\gamma$.

Exercice 27 ***(Centrale MP 2017)***

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes, centrées et ayant un moment d'ordre 2. Soit, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$.
On suppose que $\sum_{i=1}^{+\infty}\mathbb{E}\left(X_i^2\right)=\sigma^2$.

1. Montrer que $\mathbb{P}\left(|S_n|>\alpha\right)\leqslant\dfrac{\sigma^2}{\alpha^2}$. On souhaite montrer que $\mathbb{P}\left(\sup_{n\geqslant 1}|S_n|>\alpha\right)\leqslant\dfrac{\sigma^2}{\alpha^2}$.
2. Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et pour $v\in[\![1\,;n]\!]$, T_v l'indicatrice de $A_v=\left(\bigcap_{k=1}^{v-1}\left(|S_k|\leqslant\alpha\right)\right)\cap\left(|S_v|>\alpha\right)$.
   (a) Montrer que $\sum_{i=1}^{n}T_i$ est l'indicatrice de $\left(\text{il existe } k\in[\![1\,;n]\!], |S_k|>\alpha\right)$.
   (b) Montrer que $\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left(T_iS_n^2\right)\leqslant\sigma^2$
   (c) Montrer que, pour tout $k\in[\![1\,;n]\!]$, $\mathbb{E}\left(T_kS_k^2\right)\leqslant\mathbb{E}\left(T_kS_n^2\right)$.
3. Montrer que, si B est l'événement $\left(\exists k\in[\![1\,;n]\!], |S_k|>\alpha\right)$, $\mathbb{P}(B)\leqslant\dfrac{\sigma^2}{\alpha^2}$. Conclure.

Exercice 28 ***(Mines MP 2021)***

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires réelles ayant un moment d'ordre 4. On pose $m=\mathbb{E}(X_1)$, $V_2=\mathbb{E}\left((X_1-\mathbb{E}(X_1))^2\right)$ et $V_4=\mathbb{E}\left((X_1-\mathbb{E}(X_1))^4\right)$.
Soit $\varepsilon>0$. Pour $n>0$, on note A_n^{ε} l'événement $\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-m\right|\geqslant\varepsilon\right)$.

1. Donner une majoration de $\mathbb{P}\left(A_n^{\varepsilon}\right)$ à l'aide de n, V_2 et V_4 (et ε).
2. En déduire que la série de terme général $\mathbb{P}\left(A_n^{\epsilon}\right)$ converge.
3. Montrer que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{p=1}^{+\infty}\bigcup_{n=p}^{+\infty}A_n^{\epsilon}\right)=0$.

Exercice 29 ***(Mines MP 2019)***

Soient $p\in]0,1[$, $\left(X_k\right)_k\geqslant 1$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p indépendantes. On pose $L_1=\max\left\{k\in\mathbb{N}^*; X_1=X_2=\cdots=X_k\right\}$ si cet ensemble est fini, $+\infty$ sinon.

1. Montrer que L_1 est presque sûrement fini, donner sa loi, son espérance et sa variance.
2. Si $L_1<+\infty$, soit $L_2=\max\left\{\ell\in\mathbb{N}^*; X_{L_1+1}=X_{L_1+2}=\cdots=X_{L_1+\ell}\right\}$ si cet ensemble est fini, $+\infty$ sinon. Montrer que L_2 est presque surement fini, donner sa loi, son espérance et sa variance.