30 ESPACES PROBABILISÉS

MODÉLISATION

→ expérience aléatoire : expérience renouvelable mais qui, dans des conditions identiques, donne des résultats différents
→ univers des possibles Ω : un ensemble qui permet de modéliser l'expérience aléatoire (les résultats qu'on peut obtenir)
→ événement : une partie des résultats possibles (une partie de Ω)

Un exemple :
→ expérience aléatoire : on lance un dé à 6 faces
→ univers : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
→ événement : « la face obtenue est paire » : $A = \{2, 4, 6\} \subset \Omega$.

I. ESPACES PROBABILISABLES

Définition 77 *(Tribus, événements)*

→ **tribu** : soit Ω un ensemble, une tribu $\mathscr{T}$ est un ensemble de parties de Ω tel que
- $\Omega \in \mathcal{T}$,
- $\mathcal{T}$ est stable par passage au complémentaire : si $A \in \mathcal{T}$ alors $\overline{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{T}$,
- $\mathcal{T}$ est stable par réunion dénombrable : si $(A_i)_{i\in I}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{T}$ et I est dénombrable alors $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$ (souvent $I = \mathbb{N}$).

→ **vocabulaire** :
- les éléments de la tribu sont appelés événements
- l'événement $\overline{A}$ est l'événement contraire
- A et B dans $\mathcal{T}$ sont incompatibles lorsque $A \cap B = \emptyset$
- un système complet d'événements et un ensemble $(A_i)_{i\in I}$ (avec I au plus dénombrable) d'événements deux à deux incompatibles et tels que $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \Omega$
- un espace probabilisable est un couple $(\Omega, \mathcal{T})$ où $\mathcal{T}$ est une tribu sur Ω.

Propriété 138 *(Tribus)*

Si $(\Omega, \mathcal{T})$ est un espace probabilisable
→ $\emptyset \in \mathcal{T}$
→ $\mathcal{T}$ est stable par réunion finie
→ $\mathcal{T}$ est stable par intersections finies ou dénombrables
→ si $A, B \in \mathcal{T}$ alors $A \setminus B = \{\omega \in A, \omega \notin B\} = A \cap \overline{B} \in \mathcal{T}$

On a une notion de « limite » d'une suite croissante ou décroissante d'événements :
→ si $A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$ alors on a $A_n = \bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k$ et l'événement « limite » est $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ (au moins l'un des événements A_k est réalisé)
→ si $A_0 \supset A_1 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$ alors on a $A_n = \bigcap\limits_{k=0}^{n} A_k$ et l'événement « limite » est $A = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ (tous les événements sont réalisés)

II. PROBABILITÉS

Définition 78 *(Probabilités)*

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable. Une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$ est une application $\mathbb{P} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{T} & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & \mathbb{P}(A) \end{array} \right.$ telle que
→ $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
→ si on a une famille d'événements $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ deux à deux incompatibles alors $\mathbb{P}\left(\biguplus\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum\limits_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)$.

un triplet $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est appelé **espace probabilisé**

Propriété 139 *(probabilité)*

si $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé :

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- si $A_1, \ldots, A_n$ sont deux à deux incompatibles alors $\mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$
- $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- **continuité croissante** : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements alors $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.
- **continuité décroissante** : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements alors $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.
- si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'événements alors $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$ (cette somme étant éventuellement infinie).
- **formule du crible** :

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathbb{P}\left(A_i \cap A_j\right) + \ldots + (-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<\ldots i_k\leqslant n} \mathbb{P}\left(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right) + \ldots + (-1)^{n-1}\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$$

Définition 79 *(Événements négligeables, presque-sûrs)*

- un événement A est négligeable lorsque $\mathbb{P}(A) = 0$. Une réunion au plus dénombrable d'événements négligeables est encore négligeable.
- un événement presque certain (ou presque sûrs) est un événement de probabilité 1.
- On appelle système quasi-complet d'événements, un ensemble $(A_i)_{i\in I}$ (avec I au plus dénombrable) d'événements deux à deux incompatibles et tels que $\bigcup_{i\in I} A_i$ est presque-sûr (c'est-à-dire que le complémentaire est un événement négligeable).

III. PROBABILITÉS CONDITIONNELLES ET INDÉPENDANCE

Définition 80 *(Probabilité conditionnelle)*

- soit B un événement de probabilité non nulle. L'application $\mathbb{P}_B : A \in \mathcal{T} \mapsto \dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$ - on note également $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B)$ (probabilité de A sachant B - attention « A sachant B » n'est pas un événement).
- **formule des probabilités composées** : $\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) > 0$ alors

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}_{A_1\cap\ldots\cap A_{n-1}}(A_n) . \mathbb{P}_{A_1\cap\ldots\cap A_{n-2}}(A_{n-1}) \ldots \mathbb{P}_{A_1}(A_2) . \mathbb{P}(A_1).$$

- **formule des probabilités totales** : si $(A_i)_{i\in I}$ est un système complets d'événements non négligeables, alors, pour tout $B \in \mathcal{T}$,

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}\left(B \cap A_i\right) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}_{A_i}(B) . \mathbb{P}\left(A_i\right)$$

- **Formule de Bayes** : si $(A_i)_{i\in I}$ est un système complets d'événements non négligeables, alors pour tout $B \in \mathcal{T}$ tel que $\mathbb{P}(B) > 0$ et $k \in I$, on a

$$\mathbb{P}_B\left(A_k\right) = \frac{\mathbb{P}\left(B \cap A_k\right)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}_{A_k}(B) . \mathbb{P}\left(A_k\right)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}_{A_k}(B) . \mathbb{P}\left(A_k\right)}{\sum_{i\in I} \mathbb{P}_{A_i}(B) . \mathbb{P}\left(A_i\right)}.$$

Définition 81 *(Indépendance)*

- deux événements A et B sont indépendants lorsque $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.
- les événements $(A_i)_{i\in I}$ sont mutuellement indépendants lorsque pour tout $J \subset I$ fini, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}\left(A_j\right)$
- si les événements $(A_i)_{i\in I}$ sont mutuellement indépendants alors ils sont deux à deux indépendants.
- si A et B sont indépendants alors A et $\overline{B}$ aussi (et $\overline{A}$ et B - $\overline{A}$ et $\overline{A}$)
- si événements $(A_i)_{i\in I}$ sont mutuellement indépendants alors lorsque $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$, les événements $(B_i)_{i\in I}$ sont mutuellement indépendants

IV. EXERCICES

Exercice 1

Dans un magasin, 7/10 des appareils proviennent d'une entreprise E_1 et les autres d'une entreprise E_2. Parmi les appareils de l'entreprise E_1, 2/10 sont défectueux et parmi ceux de l'entreprise E_2, 1/10 sont défectueux.

1. Déterminer le pourcentage d'appareils défectueux dans le magasin.
2. Un appareil donné est défectueux. Quelle est la probabilité pour qu'il vienne de l'entreprise E_2 ?

Exercice 2

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, \dots, A_n$ des événements indépendants. Montrer que la probabilité qu'aucun des événements A_i ne soit réalisé est majorée par $\exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\right)$.

Exercice 3

Vous disposez d'une boite avec 6 compartiments. Dans cette boite il y a un nombre $n \in [\![0;5]\!]$ de chocolats (au plus un dans chaque compartiment) avec équiprobabilité pour chaque nombre. Pour un nombre de chocolats donnés, toutes les répartitions dans les compartiments sont équiprobables.

1. Choisir une modélisation.
2. Vous ouvrez le compartiment 1. Quelle est la probabilité d'avoir un chocolat ?
3. Vous n'êtes pas assez rapide et quelqu'un d'autre ouvre le compartiment 1 et a la chance d'avoir un chocolat. Vous ouvrez alors le compartiment 2. Quelle est la probabilité d'avoir un chocolat ?
4. Et si le premier n'a pas eu de chocolat ?

Exercice 4

Une urne contient v boules vertes et b boules bleues. On effectue n tirages successifs de la manière suivante :
→ si l'on tire une boule verte, alors on replace cette boule dans l'urne avant le tirage suivant,
→ si l'on tire une boule bleue, on élimine cette boule avant le tirage suivant.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une boule bleue au cours des n tirages ?
2. La seconde boule est verte. Quelle est la probabilité que la première ait été bleue ?

Exercice 5

On considère trois urnes A, B et C identiques. Elles contiennent des boules noires et blanches avec une proportion p de boules blanches.
On effectue n tirages avec remise. On commence par tirer une boule dans l'urne A. Si elle est blanche, on tire la boule suivante dans la même urne, sinon on tire la boule suivante dans l'une des deux autres urnes choisie de façon équiprobable. On continue avec les mêmes règles.
On appelle p_n la probabilité d'avoir une boule blanche au tirage n et a_n, b_n et c_n la probabilité que le tirage n soit effectué dans l'urne A, B ou C.
On note enfin $X = {}^t\begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$

1. Donner X_1 et p_1.
2. Déterminer une matrice M telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = MX_n$.
3. En déduire les expressions de a_n, b_n et c_n en fonction de n.
4. Déterminer les limites des trois suites.

Exercice 6

Deux joueurs A et B lancent à tour de rôle une pièce de monnaie (A commence). La probabilité d'obtenir Face est $p \in]0,1[$ à chaque lancer. Le premier des deux qui obtient Face gagne la partie.

1. Quelle est la probabilité que A gagne lors de son lancer n ?
2. Quelle est la probabilité que A gagne ?
3. Quelles est la probabilité que le jeux ne s'arrête pas ?
4. Y a-t-il une valeur de p pour laquelle B a plus de chance de gagner que A ?

Exercice 7

On lance 2 dés jusqu'à ce qu'on obtienne la somme 5 ou 7.

1. Soit E_n l'événement : « on obtient la somme 5 au lancer n sans avoir obtenu 5 ou 7 avant ». Calculer $\mathbb{P}(E_n)$.
2. Trouver la probabilité que le jeu s'arrête sur la somme 5.
3. Trouver la probabilité que le jeu s'arrête sur la somme 7.
4. Quelle est la probabilité que le jeu ne s'arrête pas.

Exercice 8

On lance 5 dés à 6 faces. À l'issue du premier jet, on reprend les dés qui n'ont pas amené un 1 et on les relance. On procède ainsi jusqu'à o btenir cinq 1.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir les cinq 1 en moins de m lancers?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir les cinq 1 en exactement m lancers?

Exercice 9

Un nombre infini de joueurs notés $A_1, A_2\dots$ s'affrontent dans un redoutable tournoi de pile ou face (avec une pièce bien équilibrée). Les deux premiers se rencontrent, le vainqueur joue contre le joueur suivant et le jeu s'arrête dès que l'un des joueurs gagne trois fois de suite. On note p_n la probabilité que le joueur A_n gagne le tournoi et q_n celle que le joueur A_n participe.

1. Déterminer une relation entre p_n et q_n.
2. Calculer q_n pour $n \leqslant 4$ et montrer que, pour $n \geqslant 5$, $q_n = \frac{1}{2}q_{n-1} + \frac{1}{4}q_{n-2}$.
3. En déduire q_n et p_n pour tout n.

Exercice 10 ***(ruine des joueurs)***

Deux joueurs A et B disposent au départ d'un capital respectif de a et b Euros ($a+b=N$). Ils jouent à pile ou face, A ayant la probabilité p de gagner et B la probabilité $q = 1-p$ de gagner. À chaque coup, le perdant donne 1 Euro au gagnant. La partie continue jusqu'à ce qu'un joueur soit ruiné. Calculer la probabilité de ruine de chaque joueur. On notera $A_{n,m}$ l'événement "A est ruiné à l'issue d'une partie avec au départ n Euros pour A et m Euros pour B".

Exercice 11

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. On pose $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$. On munit Ω de la probabilité uniforme. Soit $d \in \mathbb{N}^*$ divisant. On note D_d l'ensemble des multiples de d dans Ω.

1. Déterminer $\mathbb{P}\left(D_d\right)$.
2. On écrit $n = p_1^{\alpha_1}\dots p_r^{\alpha_r}$ la décomposition de n en facteurs premiers. Les événements $D_{p_1}, \dots, D_{p_r}$ dont-ils mutuellement indépendants?
3. On note $\varphi(n)$ le nombre d'éléments de Ω premiers avec n. Montrer que $\dfrac{\phi(n)}{n} = \displaystyle\prod_{k=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$.

Exercice 12

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements mutuellement indépendants de $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. Justifier que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{N\to+\infty}\prod_{k=0}^{N}\mathbb{P}\left(A_k\right) = \prod_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}\left(A_k\right).$$

Exercice 13 ***(CCP MP 2018)***

Soit $(\Omega, T, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$.
2. Soient A et B deux éléments incompatibles de T. Montrer que $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \leqslant \dfrac{1}{4}$.
3. Soient A et B deux éléments de T.
   (a) Montrer que $\mathbb{P}(A\cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A\cap B)\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) - \mathbb{P}\left(\overline{A}\cap B\right)\mathbb{P}(A)$.
   (b) Montrer que $|\mathbb{P}(A\cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leqslant \frac{1}{4}$.

Exercice 14

Soit $(\Omega', \mathcal{T}')$ un espace probabilisable. Soit $f : \Omega \to \Omega'$ une application. On note $\mathcal{T} = f^{-1}(\mathcal{T}') = \{f^{-1}(B), B \in \mathcal{T}'\}$. L'ensemble $\mathcal{T}$ est-il une tribu sur Ω ?

Exercice 15 ✫

Soit Ω un ensemble infini et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de parties de Ω vérifiant

$$n \neq m \Rightarrow A_n \cap A_m = \emptyset \text{ et } \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega$$

On pose

$$\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{n\in T} A_n ; T \in \mathscr{P}(\mathbb{N}) \right\}$$

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu de Ω.
2. On suppose l'ensemble Ω dénombrable. Montrer que toute tribu infinie sur Ω est de la forme ci-dessus pour une certaine famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Existe-t-il des tribus dénombrables sur Ω dénombrable ?

Exercice 16 ***(Limite supérieure et inférieure)***

On considère une suite d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'une espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. On note $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcap_{m\geqslant n} A_m \right)$ et $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{m\geqslant n} A_m \right)$. On note $B = \liminf A_n$ et $C = \limsup A_n$.

1. Justifier que B et C sont des événements.
2. Montrer que $B \subset C$.
3. Décrire en langage courant ce que signifie $\omega \in B$ et $\omega \in C$.

Exercice 17 ***(Lemme de Borel-Cantelli)***

On utilisera les résultats sur les limites supérieures et inférieures. On considère de nouveau une suite d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'une espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. On redonne

$$\limsup A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{m\geqslant n} A_m \right).$$

1. On suppose que $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge :
   (a) Montrer que $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$.
   (b) En déduire que la probabilité qu'une infinité d'événements A_n se réalisent simultanément est nulle
2. On suppose que les événements A_n sont indépendants et que $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge.
   (a) Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$, $1 + x \leqslant e^x$.
   (b) Montrer alors que $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$.
   (c) On lance une infinité de fois une pièce. La probabilité d'obtenir Pile à chaque lancer est $p \in]0,1[$. Quelle est la probabilité d'obtenir une infinité de fois Pile ? Quelle est la probabilité d'obtenir une infinité de séquences de m Piles consécutifs ?

Exercice 18

On lance indéfiniment un dé équilibré à 6 faces

1. Soit A_n l'événement « aucun 6 n'a été obtenu lors des n premiers lancers ». Déterminer $\mathbb{P}(A_n)$.
2. Soit F_k l'événement « le premier 6 est obtenu au lancer k ». Déterminer $\mathbb{P}(F_k)$.
3. Soit K l'événement « 6 n'apparaît jamais ». Déterminer $\mathbb{P}(K)$.
4. Exprimer $\overline{K}$ en fonction des F_k. Retrouver la valeur de $\mathbb{P}(K)$.
5. Soient G l'événement « 6 apparaît une infinité de fois » et H l'événement « 6 apparaît à tous les lancers sauf un nombre fini d'entre-eux ». Calculer $\mathbb{P}(G)$ et $\mathbb{P}(H)$.

Exercice 19 ***(Loi ζ)***

Pour $a > 1$, on note P_a la probabilité sur $\mathbb{N}^*$ définie par $p_k = \dfrac{1}{k^a\zeta(a)}$.

1. Justifer que P_a est bien une probabilité.
2. Calculer $P_a(2\mathbb{N}^*)$. Généraliser.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $j > 1$ et $m > 1$ pour que les événements $A = j\mathbb{N}^*$ et $B = m\mathbb{N}^*$ soient indépendants.
4. On note p_i le i-ème nombre premier ($p_1 = 2, p_2 = 3\ldots$) et $A_i = p_i\mathbb{N}^*$. Montrer que $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendants.
5. Soit C_n l'ensemble des entiers de $\mathbb{N}*$ divisibles par aucun des nombres $p_1,\ldots,p_n$. Calculer $P_a(C_n)$.
6. En déduire la formule d'Euler $\zeta(a) = \lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_i^a}\right)^{-1}$.

Exercice 20

On lance une pièce équilibrée n fois de suite (avec $n \geqslant 2$). Pour $k \in [\![1\,;n]\!]$, on note P_k l'événement « on obtient pile au k-ième lancer ». On note B l'événement : « le nombre de piles lors des n lancers est pair.

1. Déterminer les probabilités de ces événements.
2. Déterminer $\mathbb{P}(A_1\cap\ldots\cap A_n\cap B)$ et en déduire que les événements ne sont pas mutuellement indépendants.
3. Montrer que toute sous-famille de n événements parmi $A_1,\ldots,A_n,B$ est une famille d'événements mutuellement indépendants.

SOLUTIONS

CHAPITRE 1 - NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1.1

On a $|z+z'|^2 = (z+z')\overline{(z+z')} = |z|^2 + [z']^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{z'})$ et $|z-z'|^2 = |z|^2 + [z']^2 - 2\mathrm{Re}(z\overline{z'})$. On somme, ce qui donne le résultat.

Exercice 1.2

On exclut les cas particuliers où l'un des deux est nul (le résultat est vrai). En élevant au carré, la relation équivaut à $|z+z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2|zz'|$ (tout est positif). En utilisant $|a|^2 = a\overline{a}$, on obtient

$$|z+z'|^2 = (z+z')(\overline{z}+\overline{z'}) = |z|^2 + |z'|^2 + z\overline{z'} + \overline{z}z' = |z|^2 + |z'|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{z'}).$$

On a $2\mathrm{Re}(z\overline{z'}) \leqslant 2|z\overline{z'}| = 2|z||z'|$ et ainsi $|z+z'|^2 \leqslant |z|^2 + |z'|^2 + 2|z|.|z'| = (|z|+|z'|)^2$ (on simplifie les carrés car tout est positif).
On a l'égalité si, et seulement si $\mathrm{Re}(z\overline{z'}) = |zz'|$. Puisque $|z'| = |\overline{z'}|$), l'égalité est équivalente à $\mathrm{Re}(z\overline{z'}) = |z\overline{z'}|$, ce qui est vrai si, et seulement si $z\overline{z'} \in \mathbb{R}^+$. On note $k \in \mathbb{R}^+$ ce réel. Puisque z' est non nul, $z\overline{z'} = k \Leftrightarrow zz'\overline{z'} = kz'$ et $z = \dfrac{k}{|z'|^2}z'$ (et même puisque $k = |zz'|$, on a $z = \dfrac{|z|}{|z'|}z'$).

Exercice 1.3

On suppose $n \neq 0$. On factorise $z^2+1 = (z+i)(z-i)$, ce qui donne l'équation équivalente

$$(z+i)^n\left((z-i)^n - (z+i)^n\right) = 0.$$

On a la solution $z = -i$. Pour $z \neq -i$, l'équation équivaut à $\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)^n = 1$. Cela équivaut à l'existence de $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\dfrac{z-i}{z+i} = e^{2ik\pi/n}$. Pour k multiple de n, il n'y a pas de solution sinon

$$z = i\frac{1+e^{2ik\pi/n}}{1-e^{2ik\pi/n}} = i\frac{2\cos(k\pi/n)}{-2i\sin(k\pi/n)} = -\mathrm{cotan}\,(k\pi/n).$$

Exercice 1.4

Plusieurs moyens pour le faire :

→ On effectue une récurrence sur n le nombre de termes de la somme. Soit $\mathscr{P}(n)$: « si $z_1,\dots,z_n$ sont des complexes tels que $\left|\sum_{i=1}^n |z_i|\right| = \sum_{i=1}^n |z_i|$ alors il existe $z \in \mathbb{C}$ et des réels positifs $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ tels que $z_i = \lambda_i z$ ».
- La proposition est vraie pour $n = 2$.
- Soit $n \geqslant 2$ tel que $\mathscr{P}(k)$ est vraie jusqu'au rang n. On considère $n+1$ complexes non nuls (sinon on se ramène à un nombre de termes inférieur) vérifiant l'égalité. On a alors

$$\begin{aligned}|z_1|+\dots+|z_n|+|z_{n+1}| &= |(z_1+\dots+z_n)+z_{n+1}| \leqslant |z_1+\dots+z_n|+|z_{n+1}|\\ &\leqslant |z_1|+\dots+|z_n|+|z_{n+1}|,\end{aligned}$$

  et ainsi, d'une part $|z_1+\dots+z_n| = |z_1|+\dots+|z_n|$ et d'autre part z_{n+1} et $z_1+\dots+z_n$ sont sur la même demi-droite complexe. On applique la propriété de récurrence qui donne $z_i = \lambda_i z$ pour $i = 1,\dots,n$. Alors $z_1+\dots+z_n = (\lambda_1+\dots+\lambda_n)z$ avec $\lambda = \lambda_1+\dots+\lambda_n > 0$ (tous strictement positifs). Puisque z_{n+1} est sur la même demi droite, on a $z_{n+1} = \lambda_{n+1}z$.
- Par récurrence, le résultat est vrai pour tout $n \geqslant 2$.

→ On écrit $z_k = r_k e^{i\theta_k}$ avec $r_k \geqslant 0$. On a

$$|z_1+\dots+z_n|^2 = (z_1+\dots+z_n).\left(\overline{z_1}+\dots+\overline{z_n}\right)$$

On a, si $j \neq k$, $z_j\overline{z_k} + z_k\overline{z_j} = 2r_jr_k\cos(\theta_j-\theta_k) \leqslant 2r_jr_k$ avec égalité si et seulement si $\theta_j \equiv \theta_k[2\pi]$. On a alors

$$|z_1+\dots+z_n|^2 = \sum_{j=1}^n |z_j|^2 + 2\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} 2r_jr_k\cos(\theta_j-\theta_k) \leqslant \sum_{j=1}^n |z_j|^2 + 2\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} 2r_jr_k = (|z_1|+\dots+|z_n|)^2$$

avec égalité si et seulement si tous les $\cos(\theta_j-\theta_k)$ valent 1, donc si et seulement si $\theta_j \equiv \theta_k[2\pi]$ pour chaque $j \neq k$. On en déduit le résultat.

Exercice 1.5

→ On peut le faire analytiquement : on a $|z| = 1$ donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$. La seconde relation $|z+1| = 1$ donne $|1+e^{i\theta}| = 1$. Or $1+e^{i\theta} = 2e^{i\theta/2}\cos(\theta/2)$. L'équation équivaut donc à $|\cos(\theta/2)| = 1/2$ ce qui équivaut à l'existence d'un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta/2 = \pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $\theta/2 = \pm 2\frac{\pi}{3}+2k\pi$. Finalement, cela équivaut à $\theta = \pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ et $z = j$ ou $z = \overline{j}$.

→ On le fait plus simplement géométriquement : les complexes sont ceux qui sont à l'intersection des cercles $C(O,1)$ et $C(A,1)$ où A est le point d'affixe -1. On retrouve les points intersection du cercle $C(O,1)$ et de la médiatrice de $[OA]$ (droite d'équation $x = -1/2$). Cela redonne j et $\overline{j}$.