29 ESPACES PRÉHILBERTIENS

I. PRODUITS SCALAIRES

Définition 75 *(Produit scalaire)*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle produit scalaire sur E toute application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$
- → bilinéaire
- → symétrique : pour tout $x, y \in E$, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$,
- → positive : pour tout $x \in E$, $\varphi(x, x) \geqslant 0$,
- → définie : si $\varphi(x, x) = 0$ alors $x = 0$.

On appelle **espace préhilbertien** tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire et **espace euclidien** tout espace préhilbertien de dimension finie.
Notation : au lieu de $\varphi(x, y)$: $\langle x, y\rangle$ ou $(x|y)$.

Propriété 131 *(produit scalaire)*

- → inégalité de Cauchy Schwarz : pour tout $x, y \in E$, $\left|\varphi(x, y)\right| \leqslant \sqrt{\varphi(x,x)}\sqrt{\varphi(y,y)}$,
- → l'application $x \mapsto \sqrt{\varphi(x,x)}$ est une norme (appelée norme euclidienne) - on la note $\|\cdot\|$ dans la suite
- → formules de polarisation : pour tout $x, y \in E$

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$$

- → formule de Pythagore :
  - on a $\langle x, y\rangle = 0$ si et seulement si $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$,
  - si $\left\langle x_i, x_j\right\rangle = 0$ pour $i \neq j$ alors $\left\|\sum_{i=1}^{k} x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{k} \|x_i\|^2$.

II. ORTHOGONALITÉ

Définition 76 *(Orthogonalité et orthogonal)*

- → Orthogonalité :
  - x, y sont orthogonaux lorsque $\langle x, y\rangle = 0$,
  - si $x \in E$ et $A \subset E$ alors $x \perp A$ lorsque, pour tout $a \in A$, $\langle a, x\rangle = 0$
  - $A, B \subset E$ sont orthogonales lorsque, pour tout $a \in A$ et $b \in B$, $\langle a, b\rangle = 0$.
  - une famille $\left(f_i\right)_{i\in I}$ de vecteurs de E est orthogonale lorsque pour tout $i \neq j$ dans I, $\left\langle f_i, f_j\right\rangle = 0$. Elle est orthonormale lorsque $\left\langle f_i, f_j\right\rangle = \delta_{ij}$.
- → Si A est une partie de E, on note $A^{\perp} = \{x \in E, \forall a \in A, \langle a, x\rangle = 0\}$.

Propriété 132

Une famille orthogonale de vecteurs qui ne contient pas le vecteur nul est libre

Propriété 133 *(Orthogonal)*

Soient A, B des parties de E, F et G des sous-espaces vectoriels de E
- → $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E, on a $A \subset A^{\perp\perp}$ et A orthogonal à $A^{\perp}$
- → si $A \subset B$ alors $B^{\perp} \subset A^{\perp}$
- → si les sev $(F_i)_{i\in I}$ sont deux à deux orthogonaux alors ils sont en somme directe.
- → on a $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$ et $F^{\perp} + G^{\perp} \subset (F \cap G)^{\perp}$.

Propriété 134 *(Orthonormalisation de Gram-Schmidt)*

Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une famille libre. Il existe une famille orthonormée $(f_1,\dots,f_n)$ telle que

$$\forall k \in [\![1;n]\!], \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k) = \mathrm{Vect}(f_1,\dots,f_k),$$

avec unicité si on ajoute la condition $\langle e_k, f_k\rangle > 0$ pour tout $k \in [\![1;n]\!]$. Plus précisément, on a

$$f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} \quad \text{et } f_k = \frac{e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle f_i, e_k\rangle f_i}{\left\| e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle f_i, e_k\rangle f_i \right\|} \text{ si } k \geqslant 2$$

Proposition 135 *(espaces euclidiens)*

Soit E un espace euclidien.

→ E admet des bases orthonormées

→ si $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ est **une base orthonormée** de E alors si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, alors

- $x_i = \langle e_i, x\rangle$ et $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x\rangle^2$,
- $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x\rangle \langle e_i, y\rangle$.

→ si $(e_1,\dots,e_k)$ est une famille orthonormée, alors on peut la compléter en une base orthonormée.

→ théorème de Riesz : si φ est une forme linéaire sur E alors il existe un unique vecteur a tel que, pour tout $x \in E$, $\varphi(x) = \langle a, x\rangle$.

III. PROJECTIONS ORTHOGONALES

Proposition 136 *(Projections orthogonales)*

Soit E un espace préilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, alors

→ $F \oplus F^\perp = E$,

→ si p_F est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$ (appelé projection orthogonale sur F) et si $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ est **une base orthonormée** de F, alors

- pour tout $x \in E$, $p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x\rangle e_i$
- on a $\|x\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x)\|^2$ et ainsi $\|p_F(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x\rangle^2 \leqslant \|x\|^2$ (formule de Bessel).

→ si E est de dimension finie n et F un sous-espace vectoriel de E alors

- $\dim F^\perp = n - \dim F$, $F = F^{\perp\perp}$
- $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ et $(F\cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$ (si G est aussi un sev de E).

Proposition 137 *(Distance à un sous-espace vectoriel)*

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E alors pour tout $x \in E$

$$d(x,F) = \min_{f\in F} \|x - f\| = \|x - p_F(x)\|$$

et $p_F(x)$ est l'unique vecteur de F qui réalise le minimum.

Exercice 1

On se place dans $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire classique et de sa base canonique (e_1, e_2, e_3). On considère le sous-espace vectoriel F défini par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z &=& 0 \\ x-2y+3z &=& 0 \end{array} \right.$$

1. trouver une base orthonormée de F.
2. Donner la matrice de la projection orthogonale sur F.
3. Calculer $d(e_1, F)$.

Exercice 2

On définit pour $A, A' \in M_2(\mathbb{R})$, $\varphi(A,A') = \mathrm{tr}\,({}^tAA')$. On note $\mathscr{F} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$. On admet que φ est un produit scalaire.

1. Démontrez que $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de $E = M_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminez une base de $\mathscr{F}^\perp$.
3. Déterminez la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathscr{F}^\perp$.
4. Déterminer la distance de J à $\mathscr{F}$.

Exercice 3 ***(Mines MP 2017)***

Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^{1} (t^4 - at^2 - bt - c)^2\,dt$.

IV. EXERCICES

PRODUIT SCALAIRE, ORTHOGONALITÉ

Exercice 4

On munit $E = \mathbb{R}[X]$ (et aussi $\mathbb{R}_n[X]$) de son produit scalaire usuel (sur les coefficients). Déterminer l'orthogonal dans $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}[X]$ des espaces suivants :

a) $E_1 = \{P \in E, P(0) = 0\}$.

b) $E_2 = \{P \in E, P(1) = 0\}$.

c) $E_3 = \{P \in E, \int_0^1 P(t)\,dt = 0\}$.

Exercice 5

Soit E un espace euclidien de dimension n muni d'un produit scalaire $(.|.)$. et $(v_1,\dots,v_k)$ une famille libre de vecteurs de E

1. Déterminer le rang, l'image et le noyau de l'endomorphisme de E défini par
$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} (v_i|x)v_i.$$
2. On suppose $k = n$. Montrer que pour tout $(a_1,\cdots,a_n)$ de $\mathbb{R}^n$, il existe un unique $x \in E$ tel que $\forall i \in [\![1;n]\!], (v_i|x) = a_i$.

Exercice 6 ***(Mines MP 2015)***

Soient $(E, \|\,\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé non réduit à $\{0\}$ et $f \in \mathscr{L}(E,\mathbb{R})$ continue non nulle. On pose $|\!|\!| f |\!|\!| = \sup_{y\neq 0} \dfrac{|f(y)|}{\|y\|}$. Soit $x \in E\setminus \ker f$. Montrer que $d(x, \ker f) = \dfrac{|f(x)|}{|\!|\!| f |\!|\!|}$ et que la distance est atteinte si et seulement si $|\!|\!| f |\!|\!|$ est atteinte.

Exercice 7

On note $\ell^2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série de terme général u_n^2 converge, muni du produit scalaire défini par $\langle u,v\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$. Soit F le sous-espace formé des suites nulles à partir d'un certain rang. Vérifier que $F \subset \ell^2(\mathbb{R})$, puis déterminer $F^\perp$. Déterminer l'adhérence de F et en déduire (ça ce n'est plus au programme) une famille totale de $\ell^2(\mathbb{R})$.

Exercice 8

On munit $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ du produit scalaire $(f,g) \mapsto (f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$.

1. Montrer l'existence et l'unicité de $A_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ P(0) = (A_n|P)$.
2. Montrer que A_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et possède n racines simples dans $]0,1[$.

Exercice 9 ***(Mines MP)***

On pose $E = \mathscr{C}([-1,1],\mathbb{R})$. On pose, pour f et g dans E, $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$.

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
2. On pose $F = \{f \in E, \forall x \in [0,1], f(x) = 0\}$. Déterminer $F^{\perp}$.
3. Déterminer $F + F^{\perp}$.
4. Déterminer l'orthogonal de l'ensemble des fonctions polynomiales.

Exercice 10

Soit E un espace euclidien de dimension n et $(e_1,\cdots,e_p)$ des vecteurs unitaires de E. Montrer que, si pour tout $x\in E$ on a

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{p} < x, e_i >^2,$$

alors $(e_1,\cdots,e_p)$ est une base orthonormée de E (et $p = n$).

Exercice 11 ***(Mines MP 2012)***

Soit $(E, \langle\,,\,\rangle)$ un espace euclidien de dimension n, $p \leqslant n$ et $(e_1,\ldots,e_p)$ une famille de vecteurs de E. On suppose que pour tout $x \in E$, $\|x\|^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \langle x, e_k\rangle^2$.

1. Montrer que $E = \text{Vect}(e_1,\ldots,e_p)$, que $p = n$ puis que $\|e_i\| \leqslant 1$ pour tout i.
2. Soit $i \in [\![1\,;n]\!]$. Montrer que e_i est orthogonal à tous les e_k pour $k \neq i$, puis que $\|e_i\| = 1$. En déduire que $(e_1,\ldots,e_n)$ est une base orthonormée.

PROJECTIONS, DISTANCE

Exercice 12

Soient E un espace euclidien de dimension n, $\mathscr{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ une base orthonormale de E et p un projecteur orthogonal de rang q.

1. Montrer que $\forall x \in E,\ \|p(x)\|^2 = \langle p(x), x\rangle$.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \|p(e_i)\|^2 = q$.

Exercice 13

Étant donnés A et $B \in \mathbb{R}[X]$, on pose $(A|B) = \displaystyle\int_0^{+\infty} A(t)B(t)e^{-t}\,dt$.

1. Vérifier qu'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ et que $(X^k|1) = k!$ pour $k \in \mathbb{N}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note Q le projeté orthogonal de 1 sur $F = \text{Vect}(X, X^2,\ldots,X^n)$, on l'écrit $Q = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k X^k$. On note $P = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k (X+1)(X+2)\ldots(X+k)$. Montrer que pour $k \in [\![1\,;n]\!]$, $P(k) = 0$. En déduire P et a_n.
3. On note $I = \displaystyle\inf_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n} \left(\int_0^{+\infty} (1+\alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \cdots + \alpha_n t^n)^2 e^{-t}\,dt\right)$. Montrer que $I = \dfrac{1}{n+1}$.

Exercice 14

Soit $E = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et $\varphi(f,g) = \displaystyle\int_0^1 fg + f'g'$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
2. Soit $V = \{f \in E | f(0) = f(1) = 0\}$ et $W = \{f \in E | f'' = f\}$. Montrer qu V et W sont des supplémentaires orthogonaux et exprimer la projection orthogonale sur W.
3. Soit $E_{\alpha,\beta} = \{f \in E | f(0) = \alpha \text{ et } f(1) = \beta\}$. Déterminer

$$a = \inf_{f\in E_{\alpha,\beta}} \int_0^1 f^2 + f'^2.$$

Exercice 15 ***(ENS Cachan, Rennes 2019)***

Soient $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ avec $a<b$ et $\omega:[a,b]\to\mathbb{R}^{+*}$ continue. On pose $E=\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$. Pour $(f,g)\in E^2$, on pose $\langle f,g\rangle=\int_a^b f(t)g(t)\omega(t)\mathrm{d}t$

1. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ dont la famille de fonctions polynomiales associées soit orthonormée pour $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et P_n soit de degré n pour tout $n\in\mathbb{N}$.
3. Soit $f\in E$. Pour $n\in\mathbb{N}$ on pose $a_n=\int_a^b f(t)P_n(t)\omega(t)\mathrm{d}t$. Montrer que $\sum_{n\geqslant 0} a_n^2$ converge et exprimer simplement sa somme à l'aide de f et de ω.