27 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

I. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES VECTORIELLES

Dans tout ce cours, F désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, I un intervalle de $\mathbb{R}$

CADRE ET NOTATIONS

Définition 70 *(Cadre et solution)*

I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

- → cas vectoriel : soit $a \in \mathscr{C}^0(I, \mathscr{L}(F))$ et $b \in \mathscr{C}^0(I, F)$. On appelle solution de

$$(E) : y' = a(t)y + b(t),$$

toute fonction $y : I \to F$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que, pour tout $t \in I$, $y'(t) = a(t)\big(y(t)\big) + b(t)$.

- → cas matriciel : soit $A \in \mathscr{C}^0(I, M_n(\mathbb{K}))$ et $B \in \mathscr{C}^0(I, M_{n1}(\mathbb{K}))$. On appelle solution de

$$(E) : Y' = A(t)Y + B(t),$$

toute fonction $Y : I \to M_{n1}(\mathbb{K})$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que, pour tout $t \in I$, $Y'(t) = A(t).Y(t) + B(t)$.

Dans la suite, on désignera par $(E) : y' = a(t)y + b(t)$ et $(H) : y' = a(t)y$, l'équation homogène associée.

Proposition 119

- → Si y_0 est une solution de (E) alors y est solution de (E) si et seulement si $y - y_0$ est solution de (H).
- → les solutions de (E) s'obtiennent comme somme d'une solution particulière de (E) et de n'importe quelle solution de (H).

THÉORÈME DE CAUCHY ET CONSÉQUENCES

Théorème 27 *(Cauchy-Lipschitz)*

Soit $t_0 \in I$ et $y_0 \in F$. Il existe une et une seule solution sur I au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' = a(t)y + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Proposition 120 *(Conséquences du théorème de Cauchy)*

soit $t_0 \in I$

- → l'application $\theta_{t_0} : \begin{cases} \mathscr{S}_H & \to & F \\ y & \mapsto & y(t_0) \end{cases}$ est linéaire et bijective
- → notamment $\dim \mathscr{S}_H = \dim F = n$.

Proposition 121 *(Structure des ensembles de solutions)*

- → l'ensemble des solutions $\mathscr{S}_H$ de $(H) : y' = a(t)y$ est un espace vectoriel de dimension n
- → l'ensemble des solutions $\mathscr{S}_E$ de $(E) : y' = a(t)y + b(t)$ est un espace affine de dimension n dirigé par $\mathscr{S}_H$.

SYSTÈMES À COEFFICIENTS CONSTANTS

Théorème 28 *(Systèmes à coefficients constants)*

- → L'unique solution de $x' = ax$ (où $a \in \mathscr{L}(F)$) vérifiant $x(t_0) = x_0$ est la fonction $x : t \mapsto \exp((t-t_0)a)(x_0)$.
- → L'unique solution de $X' = A.X$ (où $A \in M_n(\mathbb{K})$) vérifiant $X(t_0) = X_0$ est la fonction $X : t \mapsto \exp((t-t_0)A).X_0$.
- → Les solutions de $X' = AX + B(t)$ sont les fonctions

$$t \mapsto \exp(tA)X_0 + \exp(tA)\int_{t_0}^{t} \exp(-uA)B(u)\,du.$$

Théorème 29 *(Cas diagonalisable)*

Lorsque A est diagonalisable, si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres et $V_1, \ldots, V_n$ une base de vecteurs propres associés, alors les fonctions $f_i : t \mapsto e^{\lambda_i t} V_i$ forment un système fondamental de solutions de $X' = AX$. Toute solution s'écrit donc $X : t \mapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{\lambda_i t} V_i$.

MÉTHODE - RÉSOLUTION PRATIQUE LORSQUE A EST DIAGONALISABLE

- → $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale
- → L'équation $X' = AX + B(t)$ se récrit $P^{-1}X' = D(P^{-1}X) + P^{-1}B(t)$,
- → on note $Z(t) = P^{-1}X(t)$ et $C(t) = P^{-1}B(t)$: on obtient $Z' = DZ + C(t)$
- → cette dernière équation donne n équations indépendantes. On résout et on revient à X avec $X(t) = PZ(t)$

Remarques :

- → Lorsque l'équation est homogène, on n'a pas besoin de calculer P^{-1}.
- → La méthode se généralise en trigonalisant. On commence par résoudre la dernière équation puis on remonte avec les solution précédemment trouvées.

Exercice 1

Résoudre les systèmes différentiels suivants :

a) $\left\{\begin{array}{lcl} x' &=& x + \alpha y + e^t \\ y' &=& \alpha x + y + e^t \end{array}\right. \quad (\alpha \in \mathbb{R}^*)$

b) $\left\{\begin{array}{lcl} x' &=& ty \\ y' &=& -tx \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{lcl} x' &=& x + y - z \\ y' &=& x - y + z \\ z' &=& x + y - z \end{array}\right.$

Exercice 2 ***(CCINP MP 2021)***

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Justifier la diagonalisabilité de A. Donner une base de vecteurs propres.
2. Résoudre le système différentiel $\left(x' = x + 2z, y' = y, z' = 2x + z\right)$.

II. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES SCALAIRES D'ORDRE 1

Proposition 122

Soient $a, b \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{K})$. On note A une primitive de a sur I. Les solutions de $y' = a(t)y + b(t)$ sont les fonctions

$$y : t \mapsto Ke^{A(t)} + e^{A(t)}\int_{t_0}^{t} b(u)e^{-A(u)}\,dy, \text{ où } K \in \mathbb{K}.$$

Exercice 3

Résoudre sur les intervalles de $\mathbb{R}$, les équations différentielles suivantes :

a) $(1-x)y' + 2y = 2$

b) $xy' + 2y = \dfrac{x}{1+x^2}$

c) $|x|y' + (x-1)y = x^2$

III. Équations différentielles scalaires d'ordre 2

Généralités

Proposition 123 *(Théorème de Cauchy-Lipschitz)*

→ Soient a, b et c des fonctions continues sur I, $x_0 \in I$. Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, il existe une unique solution sur I à

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x) \text{ avec } y(x_0) = \alpha \text{ et } y'(x_0) = \beta.$$

→ L'ensemble des solutions sur I de $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ est un espace vectoriel de dimension 2.
→ L'ensemble des solutions sur I de $y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$ est un espace affine de dimension 2.

Définition 71 *(Wronskien)*

→ Soient f_1, f_2 deux solutions de $(H) : y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$. On appelle matrice wronskienne de f_1, f_2 la matrice $W(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{pmatrix}$ et son déterminant $w(x)$ est appelé wronskien.
→ On a $w(x) = f_1(x)f_2'(x) - f_2(x)f_1'(x)$ et $w' + a(x)w = 0$.
→ Le wronskien est soit toujours nul, soit il ne s'annule jamais.

Proposition 124 *(Caractérisation d'une base)*

Soient f_1, f_2 deux solutions de (H). On a équivalence entre

1. $\{f_1, f_2\}$ est une base de solutions de (H),
2. pour tout $x_0 \in I$, $w(x_0) \neq 0$,
3. il existe $x_0 \in I$, $w(x_0) \neq 0$.

Méthode - Variation des constantes

Si f_1, f_2 est une base de solutions de $(H) : y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$, alors on peut trouver une solution de $(E) : y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ sous la forme $y(x) = \lambda(x)f_1(x) + \mu(x)f_2(x)$ avec la condition $\lambda'(x)f_1(x) + \mu'(x)f_2(x) = 0$. On obtient le système

$$\begin{cases} \lambda'(x)f_1(x) + \mu'(x)f_2(x) & = & 0 \\ \lambda'(x)f_1'(x) + \mu'(x)f_2'(x) & = & c(x) \end{cases}$$

Calculs

Méthode - Résolution de l'équation différentielle

Quelques idées pour la résolution aussi bien de l'équation différentielle homogène $(H) : a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$, que l'équation différentielle avec second membre $(E) : a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$

→ **cas d'une équation à coefficients constants** : on cherche des solutions $x \mapsto e^{rx}$ pour obtenir $ar^2 + br + c = 0$ comme CNS pour être solution. Pour une solution particulière, on la cherche du même type (ou variation des constantes)
→ recherche des solutions DSE (aussi bien pour (H) que pour (E))
→ **changement de fonction** (hors prog.) : si y_0 est une fonction qui ne s'annule pas, on peut poser $z = y/y_0$ et transformer l'équation différentielle sur y en une équation différentielle équivalente sur z. Notamment si y_0 est solution de (H) alors z' vérifie une équation d'ordre 1.
→ pour une solution particulière de (E) : méthode de variation des constantes.

Exercice 4 ***(Mines MP 2012)***

Déterminer l'ensemble des solutions de $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{\sqrt{1+x^2}}$.

Exercice 5 ***(Équation linéaire d'ordre 2 à coefficients non-constants)***

Résoudre les équations suivantes sur tout intervalle de $\mathbb{R}$:

a) $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$ (chercher une solution polynomiale)
b) $xy''+2y'-xy=0$ (chercher une solution DSE)
c) $x^2y''-6xy'+(x^2+12)y=0$ (chercher une solution DSE)
d) $xy''-y'-x^3y=0$ (changement de variable $t=x^2$)
e) $x^2y''+xy'+y=0$ (changement de variable $x=e^t$)
f) $y''+\frac{2}{x}y'+y=0$ (changement de fonction $z=x^ny$, n à déterminer)
g) $x(1-x)y''-2(x^2-1)y'+2(1-x)y=0$ (chercher une solution $x\mapsto x^\alpha$)

Exercice 6

Résoudre l'équation différentielle (E) $y''+y=\cot an\, x$ sur $I=]0,\pi[$.

IV. EXERCICES

Exercice 7 ***(Mines MP 2017)***

On considère l'équation différentielle (E) : $t^2x''-4tx'+(t^2-6)x=0$.

1. Déterminer les solutions qui sont somme d'une série entière au voisinage de 0.
2. Déterminer la dimension de l'espace des solutions sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8

Soient a et b deux fonctions de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et y et z de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant sur $\mathbb{R}^+$,

$$\left\{\begin{array}{ccc} y(0) & = & z(0) \\ y' & = & a(x)y+b(x) \\ z' & \leqslant & a(x)z+b(x) \end{array}\right.$$

Montrer que pour tout $x\geqslant 0$ on a $y(x)\geqslant z(x)$.

Exercice 9

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, et soit K un vecteur non nul de E. Quelles sont les courbes intégrales de l'équation différentielle $X'=K\wedge X$?

Exercice 10

Soit $A\in M_{2n}(\mathbb{R})$ telle que $A^2+I_{2n}=0$. Résoudre le système différentiel

$$\frac{dX}{dt}=AX(t)\,.$$

Exercice 11

On s'intéresse au système différentiel $X'=a(t)X$ où $a(t)\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R},M_2(\mathbb{R}))$. On note A une primitive de a.

1. Dans le cas où $a(t)=\begin{pmatrix}0 & 2t\\ -2t & 0\end{pmatrix}$, calculer $\exp(A(t))$ et comparer aux solutions du système différentiel.
2. Même travail avec $a(t)=\begin{pmatrix}0 & 2t\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Donner une explication de cette différence.

Exercice 12

1. Résoudre l'équation différentielle (E_g) $y''-y=g$ où g est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
2. Résoudre l'équation différentielle (E) $y''-y=\dfrac{2}{\operatorname{ch}^3 x}$.
3. Soit $f\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f(0)=f'(0)=0$ et, $\forall x\in\mathbb{R}$, $f''(x)-f(x)\geqslant\dfrac{2}{\operatorname{ch}^3 x}$. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)\geqslant\dfrac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch} x}$.

Exercice 13

On considère l'équation différentielle $(E)\ :\ y'' + qy = 0$, où q est une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

1. Montrer que si f est une solution bornée de (E), alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.
2. Soit (f, g) un système fondamental de solutions de (E). Démontrer que leur Wronskien $W = fg' - f'g$ est une constante.
3. (E) admet-elle des solutions non bornées ?

Exercice 14

Soient p et q deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles. On considère l'équation

$$(E) : y'' + p(t)y' + q(t)y = 0.$$

1. Soit y une solution non nulle de (E).
   (a) Soit x_0 un zéro de y dans $[a, b]$. Montrer que $y'(x_0) \neq 0$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que y ne s'annule qu'en x_0 sur l'intervalle $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$.
   (b) Montrer que y n'a qu'un nombre fini de zéro dans un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.
2. Soient y et z deux solution non proportionnelles de (E).
   (a) Calculer le wronskien de y et z.
   (b) Montrer que y et z n'ont pas de zéros communs.
   (c) Montrer qu'entre deux zéros consécutifs de y, z possède un unique zéro (regarder z/y).

Exercice 15

Soit $A \in \mathscr{L}(E)$ dont le spectre ne rencontre pas $2i\pi\mathbb{Z}$ et $B \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, E)$ de période 1.

1. Soit x une solution de $x' = Ax + B(t)$. Montrer que $z : t \mapsto x(t+1)$ est solution de cette même équation différentielle.
2. En déduire qu'il existe une unique solution de période 1 à $x' = Ax + B(t)$.

Exercice 16

Soit $(E) : xy'' + y' + y = 0$.

1. déterminer la solution de (E) développable en série entière en 0 telle que $f(0) = 1$.
2. Montrer que $g : x \mapsto xf'^2(x) + f^2(x)$ admet en limite finie ℓ en $+\infty$, que f est bornée et f' tend vers 0.
3. Montrer que $x \mapsto f(x)f'(x)/x$ et $x \mapsto f^2(x)/x$ sont intégrables sur $[1, +\infty[$.
4. En déduire $\ell = 0$.

Exercice 17 ***(Lemme de Gronwall)***

1. Soit y et v deux fonctions continues sur $I = [a, b]$, v positive sur I, telles que, pour tout $x \in I$,

   $$y(x) \leqslant \lambda + \int_a^x v(t)y(t)\,dt.$$

   Montrer que, pour $x \in I$, $y(x) \leqslant \lambda \exp\left(\int_a^x v(t)\,dt\right)$.
2. Soit $(H) : y'' + (1 + \varphi(t))y = 0$ avec φ continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Soit f une solution de (H) et

   $$g(x) = f(x) + \int_0^x \sin(x-t)\varphi(t)f(t)\,dt.$$

   Montrer que $g'' + g = 0$. En déduire qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \geqslant 0$, $|f(x)| \leqslant a + \int_0^x |\varphi(t)f(t)|\,dt$, puis que f est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 18 ***(Centrale MP 2012)***

1. Soit $N \in M_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice $p \in \mathbb{N}^*$ ($N^p = 0$ et $N^{p-1} \neq 0$).
   (a) Montrer que $(I_n, N, N^2, \dots, N^{p-1})$ est libre.
   (b) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, calculer $\exp(t(\lambda I_n + N))$.
2. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ qui ne possède qu'une seule valeur propre λ.
   (a) Montrer que $N = A - \lambda I_n$ est nilpotente.
   (b) En déduire que les solutions de $X' = AX$ sont toutes bornées sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\lambda \in i\mathbb{R}$ et $A = \lambda I_n$.
3. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On note $\prod_{k=1}^{\ell} (\lambda_k - X)^{m_k}$ son polynôme caractéristique, les λ_k étant distincts et $m_k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que les solutions de $X' = AX$ sont toutes bornées sur $\mathbb{R}$ si et seulement si les λ_k sont dans $i\mathbb{R}$ et A est diagonalisable.
4. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Montrer que les solutions de $X' = AX$ sont toutes bornées sur $\mathbb{R}$.
5. Conclusion sur A?

Exercice 19 ***(Centrale MP 2015)***

On se donne $\phi : \mathbb{R} \to GL_n(\mathbb{R})$ continue telle que, pour tout $s, t \in \mathbb{R}$, $\phi(s+t) = \phi(s)\phi(t)$.

1. On suppose dans cette question de ϕ est de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi'(t) = \phi'(0)\phi(t)$. En déduire qu'il existe $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi(t) = \exp(tA)$.
2. Soit $\theta \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ telle que $\int_{\mathbb{R}} \theta = 1$. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\theta(x) = 0$ pour $|x| > \alpha$. On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x - t)\phi(t)\,dt$. Montrer que ψ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ puis qu'il existe $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\psi(x) = \phi(x)A$.
3. Déterminer ϕ.

Exercice 20 ***(Centrale MP 2021)***

On admet que, pour toute famille $(h_1, \dots, h_n)$ libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, il existe $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que la matrice $\left(h_i\left(a_j\right)\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ soit inversible.
Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose, pour $a \in \mathbb{R}, \tau_a(f) : x \mapsto f(x+a)$. On note $E_f = \mathrm{Vect}\{\tau_a(f), a \in \mathbb{R}\}$.

1. Déterminer E_f pour $f : x \mapsto e^x$ et pour $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.
   Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que E_f est de dimension finie n. On fixe une base $(g_1, \dots, g_n)$ de E_f.
   Pour $a \in \mathbb{R}$, il existe un unique $(\lambda_1(a), \dots, \lambda_n(a))$ tel que $\tau_a(f) = \lambda_1(a)g_1 + \cdots + \lambda_n(a)g_n$.
2. Montrer que les λ_k sont continues, puis que les λ_k sont de classe $\mathscr{C}^1$.
3. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$.
4. Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire homogène. Conclure.

Exercice 21 ***(ENS MP 2019 (SR))***

Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2$. On pose $[A, B] = AB - BA$ et on suppose que $[A, B]$ commute avec A et B.

1. Montrer que $[A, B]e^A = e^A[A, B]$.
2. Montrer que $e^{tA}Be^{-tA} = B + t[A, B]$ pour tout réel t.
3. Montrer que $\exp(A)\exp(B) = \exp\left(A + B + \frac{1}{2}[A, B]\right)$.
4. On pose $V = \mathrm{Vect}(A, B, [A, B])$. Montrer que V est de dimension 3 si $[A, B] \neq 0$.
5. Montrer que $\{e^M, M \in V\}$ est stable par multiplication.