

25

SÉRIES ENTIÈRES

I. RAYON DE CONVERGENCE

Définition 64 (Rayon de convergence)

Soit une série entière $\sum a_n z^n$

- **lemme d'Abel** : si $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.
- il existe un unique $R \geq 0$ ou $+\infty$ tel que
 - si $|z| < R$ alors $\sum a_n z^n$ converge absolument,
 - si $|z| > R$ alors la suite $(a_n z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée.
- on a

$$R = \sup \{ r \geq 0, (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ bornée} \} = \sup \left\{ r \geq 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n r^n = 0 \right\} = \sup \left\{ r \geq 0, \sum a_n r^n \text{ cv absolument} \right\}.$$

Propriété 110 (Convergence)

Si $\sum a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence R et $u_n : z \mapsto a_n z^n$, alors

- $\sum u_n$ converge absolument sur $B(0, R)$,
- $\sum u_n$ converge normalement sur $\bar{B}(0, r)$ si $r < R$.

notamment $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur $B(0, R)$.

Propriété 111 (Rayon de convergence)

soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence R_a et R_b

- **comparaison** :
 - s'il existe n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, $|a_n| \leq |b_n|$ alors $R_a \geq R_b$,
 - si $a_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{0} (b_n)$ ou $a_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o} (b_n)$ alors $R_a \geq R_b$,
 - si $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n$, alors $R_a = R_b$
- **opérations** :
 - le rayon de convergence de $\sum (a_n + b_n) z^n$ est supérieur ou égal à $\min(R_a, R_b)$ - avec égalité si $R_a \neq R_b$,
 - le rayon de convergence de la série produit de Cauchy $\sum c_n z^n$ où $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ est supérieur ou égal à $\min(R_a, R_b)$
- **dérivation/intégration** : le rayon de convergence de la série dérivée $\sum n a_n z^{n-1}$ et de la série primitive $\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ est encore R_a .



MÉTHODE - DÉTERMINATION DU RAYON DE CONVERGENCE

On cherche le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$:

- critère de d'Alembert (en se ramenant à une série numérique $\sum u_n$ avec u_n qui ne s'annule pas),
- comparaison du terme général (essentiellement recherche d'un équivalent simple de a_n)
- utilisation de la définition : si on trouve $r \geq 0$ tel que $\sum a_n r^n$ converge, $a_n r^n$ tend vers 0 ou est bornée alors $R \geq r$ - si on trouve $r \geq 0$ tel que $\sum |a_n r^n|$ diverge ou $|a_n r^n|$ non bornée/tend vers $+\infty$ alors $R \leq r$.
- utilisation des propriétés pour le rayon de convergence de la somme/du produit de deux séries entières
- calcul du rayon de convergence de la série primitive/dérivée (si cela simplifie le terme général)

Exercice 1

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes

- | | | | |
|--|---|--|--|
| a) $\sum n^\alpha z^n$. | d) $\sum \frac{\text{ch } n}{n} z^n$ | h) $\sum \frac{(2n)!}{n! n^n} z^n$. | k) $\sum n! z^{n^2}$. |
| b) $\sum \frac{n^2}{3^n + 1} z^n$. | e) $\sum (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) z^n$. | i) $\sum \sin n z^n$. | l) $\sum \frac{z^{n!}}{n!}$. |
| c) $\sum \frac{\sqrt{n} \ln n}{n^2 + 2} z^n$ | f) $\sum n^n z^n$. | j) $\sum \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n$. | m) $\sum \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1}) z^n$. |
| | g) $\sum 5^n z^{2n+1}$. | | |

**Exercice 2**

Soit (a_n) une suite convergeant vers 0. On suppose que $\sum a_n$ diverge. Quel est le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$?

II. SÉRIES ENTIÈRES D'UNE VARIABLE RÉELLE**Propriété 112 (Régularités)**

soit $u_n : x \mapsto a_n x^n$ et $\sum u_n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, de somme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

→ **Continuité** : f est définie et continue sur $] -R, R[$ et $\sum u_n$ converge normalement sur tout segment $[-r, r]$ avec $0 < r < R$.

→ **Continuité au bord** : si $\sum a_n R^n$ converge, alors f est continue en R ($\lim_{x \rightarrow R^-} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$).

→ **Primitive** : pour tout $x \in] -R, R[$, on a $\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ (et même rayon de convergence).

→ **Dérivée** : f est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -R, R[$ et, pour tout $x \in] -R, R[$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ (et même rayon de convergence).

→ **Dérivées supérieures** : f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -R, R[$ et pour tout $x \in] -R, R[$, $f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n x^{n-k}$ (et même rayon de convergence).

Propriété 113

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, de somme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

→ **coefficients** : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$,

→ **parité** : f est paire (resp. impaire) si et seulement si, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_{2p+1} = 0$ (resp. $a_{2p} = 0$),

→ **unicité** : s'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in] -\alpha, \alpha[$, $f(x) = 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$.

Exercice 3 (expression intégrale des coefficients)

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence infini. Calculer $A_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int} dt$. Montrer que si f est bornée sur \mathbb{C} , alors elle est constante. La conclusion subsiste-t-elle si f est bornée sur \mathbb{R} ?

III. DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE ENTIÈRE**Définition 65 (développement en série entière)**

→ On dit qu'une fonction f d'une variable réelle admet un développement en série entière au voisinage de 0 lorsqu'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et un réel $\alpha \in]0, R[$ tel que, pour tout $x \in] -\alpha, \alpha[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

→ On dit qu'une fonction f d'une variable complexe admet un développement en série entière au voisinage de 0 lorsqu'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et un réel $\alpha \in]0, R[$ tel que, pour tout $z \in B(0, \alpha)$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

on dit également que f est développable en série entière au voisinage de 0 (ou en 0 sur $] -\alpha, \alpha[$ ou $B(0, \alpha)$)



⚙️ MÉTHODE - EXISTENCE DU DSE

on veut prouver que f , une fonction \mathcal{C}^∞ sur $] - a, a[$, est DSE en 0 :

- pratique : on montre que $f(x)$ coïncide avec la somme d'une série entière par le calcul (somme, produit, dérivée, primitives et DSE usuels),
- théorique : on utilise la formule de Taylor avec reste intégral : on fixe x , on écrit

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt,$$

et on prouve que $R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ (à x fixé).

- autre : utilisation d'équations différentielles, d'équations fonctionnelles...

DSE À CONNAITRE

$\sin x$	$= \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}$	$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$	$R = +\infty$
$\cos x$	$= \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!}$	$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$	$R = +\infty$
e^x	$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$	$R = +\infty$
$\operatorname{sh} x$	$= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}$	$= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$	$R = +\infty$
$\operatorname{ch} x$	$= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!}$	$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$	$R = +\infty$
$\frac{1}{1+x}$	$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$	$= 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + \dots$	$R = 1$
$\frac{1}{1-x}$	$= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	$= 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$	$R = 1$
$\ln(1+x)$	$= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$	$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$	$R = 1$
$\arctan(x)$	$= \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{2p+1}$	$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$	$R = 1$
$(1+x)^\alpha$	$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$	$= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots$	$R = 1$

Exercice 4

Calculer le développement en série entière en 0 des fonctions suivantes :

a) $\frac{1}{x^2 - 3x + 2}$

c) $e^x \sin(x)$

e) $\arctan\left(\frac{1}{1+x}\right)$

b) $\ln(x^2 - 5x + 6)$

d) $\frac{1}{x^2 - 2x \operatorname{ch} \theta + 1}$

f) $\int_0^x \cos(t^2) dt$

Exercice 5

- 1) Développer la fonction $f : x \mapsto e^x \sin x$ en série entière et préciser le rayon de convergence.
- 2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a la relation

$$\frac{(\sqrt{2})^n \sin \frac{n\pi}{4}}{n!} = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!(n-2k-1)!}$$



IV. EXERCICES

RAYON DE CONVERGENCE

Exercice 6

Soient une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R .

1. Si $\lambda \in \mathbb{C}^*$, quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum \lambda^n a_n z^n$?
2. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n^2 z^n$?

Exercice 7

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Montrer que le rayon de convergence de $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ est infini. Que peut-on dire si $R = 0$?

Exercice 8

Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de complexes. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt[n]{|a_n|} = o\left(\frac{1}{n}\right)$.
2. $\sum_{n \geq 1} n! a_n z^n$ a un rayon de convergence strictement positif.

DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE ENTIÈRE

Exercice 9

Développer en série entière la fonction $f : x \mapsto f(x) = \sqrt{2-x}$ et préciser le rayon de convergence.

Exercice 10 (Mines MP 2018)

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{t}{x + e^t} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Montrer que f est développable en série entière en 0 et donner $f^{(p)}(0)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

SOMMATION DES SÉRIES ENTIÈRES

Exercice 11

Trouver le rayon de convergence des séries entières suivantes et calculer leur somme

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)} x^n$

c) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2 - 1}$

e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + 1}{n!} x^n$

g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right) x^n$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} (n^3 + 3n + 1) x^n$

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n$

f) $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{1 + 2 + \dots + n}$

h) $\sum_{n=0}^{+\infty} (3 + (-1)^n)^n x^n$

Exercice 12 (Mines MP 2015)

Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n+1}}{n(3n+1)}$. Déterminer le domaine de définition de f et calculer $f(x)$.

Exercice 13

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$. Déterminer le rayon de convergence, de la série entière $\sum a^n x^n$ et calculer sa somme.

**Exercice 14**Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Trouver le rayon de convergence des séries entières de coefficients $\frac{\cos(n\alpha)}{n}$ et $\frac{\sin(n\alpha)}{n}$.
2. Lorsque $|x| < 1$, calculer la somme $A(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \cos(n\alpha)$.
3. Montrer que pour $|x| < 1$ on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \sin(n\alpha) = \arctan\left(\frac{x \sin \alpha}{1 - x \cos \alpha}\right)$.

Exercice 15On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{(-1)^n}{2n-1} \binom{2n}{n}$ et, lorsque c'est possible, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.
2. Déterminer une relation entre a_n et a_{n+1} . En déduire une équation différentielle vérifiée par f et calculer f sur son intervalle ouvert de convergence.

Exercice 16Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2^n n!)^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Déterminer une équation différentielle du second ordre vérifiée par f .
3. Montrer que pour tout $x > 1$, $F(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

RÉSULTATS SUR LES SÉRIES ENTIÈRES**Exercice 17**

1. Soit (a_n) une suite de réels de limite nulle. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$. Montrer que $f(x) = \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(e^x)$.
2. Quelle relation a-t-on lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell \neq 0$?

Exercice 18 (Centrale MP 2011)

1. Déterminer le rayon de convergence de $L: z \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$.
2. On veut montrer que $\exp(L(z)) = z+1$ pour $|z| < 1$. Pour cela on considère $u: t \mapsto \frac{\exp(L(zt))}{1+zt}$. Justifier que u est dérivable sur $[0, 1]$, dériver u est conclure.
3. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Justifier l'existence de $\alpha > 0$ tel que, pour $|z| \leq \alpha$,

$$\det(I_n + zA) = \exp\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \operatorname{tr}(A^n) z^n\right).$$

Exercice 19 (Mines MP 2019)Soit f une fonction développable en série entière sur \mathbb{C} . On suppose qu'il existe $d \in \mathbb{N}^*$, A et B dans \mathbb{R}^{+*} tels que $\forall z \in \mathbb{C}, |f(z)| \leq A|z|^d + B$. Montrer que f est polynomiale.**Exercice 20 (Mines MP 2017)**Soit $q \in \mathbb{R}$ avec $|q| < 1$. Montrer que $f: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(q^n x)$ est définie sur \mathbb{R} et développable en série entière. Quel est le rayon de convergence de la série entière?



APPLICATIONS DES SÉRIES ENTIÈRES

Exercice 21

Calculer la somme des séries numériques suivantes :

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n(n+1)}$$

$$\text{b) } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (2n+1)}$$

$$\text{c) } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$$

Exercice 22

On définit pour $x \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$ la fonction f par

$$f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}.$$

1. Montrer que f se prolonge par continuité en 0.
2. Montrer que ce prolongement est \mathcal{C}^∞ .

Exercice 23 (CCP MP 2019)

Soit E un ensemble à n éléments. On note a_n le nombre de bijections sans point fixe de E dans E .

1. Démontrer que $n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_{n-k}$.
2. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$. Démontrer que la série entière de définition de f admet un rayon de convergence R non nul.
3. Calculer $e^x f(x)$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer a_n .
5. Un professeur distribue aléatoirement des copies à ses élèves. On note D_n l'événement « aucun des n élèves n'a sa propre copie ». Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(D_n)$.

Exercice 24 (nombre de parenthésages)

Soit u_n le nombre de façon de parenthéser un produit $a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$, c'est-à-dire le nombre de façons de choisir dans quel ordre on effectue les produits).

1. Calculer u_1, u_2 et u_3 .
2. Expliquer pourquoi on a, pour tout $n \geq 2$, $u_n = u_1 u_{n-1} + \dots + u_k u_{n-k} + \dots + u_{n-1} u_1 = \sum_{k=1}^{n-1} u_k u_{n-k}$.
3. On considère alors la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n$ (on suppose que son rayon de convergence est strictement positif). Déterminer une relation vérifiée par la fonction S et en déduire la valeur de u_n .

Exercice 25 (Polytechnique 2020)

Soient $\ell \in]1, +\infty[$, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{\ell a_n}{\ell^{n+1} - 1}$.

1. Montrer qu'en posant, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, on définit une fonction de classe C^∞ sur \mathbb{R} .
2. Déterminer les nombres réels x tels que $f(x) = 0$.