24 Réduction - partie 2

I. Polynômes d'endomorphismes, polynômes annulateurs

Propriété 103 *(Polynômes annulateurs)*

soit $u \in \mathscr{L}(E)$,

- → l'ensemble des polynômes annulateurs de u est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.
- → en dimension finie, l'ensemble des polynômes annulateurs de u est l'ensemble des multiples d'un unique polynôme unitaire (de degré minimal), appelé *polynôme minimal de u* et noté μ_u.
- → **théorème de Cayley-Hamilton** : le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur (et notamment $\mu_u|\chi_u$).

Propriété 104 *(Lien avec les valeurs propres)*

- → si λ est valeur propre de u alors $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(u)$.
- → Les valeurs propres de u sont exactement les racines de χ_u ou celles de μ_u.
- → si P est un polynôme annulateur de u alors les valeurs propres de u sont parmi les racines de P.

Théorème 25 *(Décomposition des noyaux)*

- → Si P et Q sont premiers entre eux alors $\ker(PQ)(u) = \ker P(u) \oplus \ker Q(u)$.
- → Si $P_1, \ldots, P_k$ sont 2 à 2 premiers entre eux alors $\ker\left(P_1 \ldots P_k\right)(u) = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker P_i(u)$.

Proposition 105 *(Polynômes d'endomorphismes)*

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

- → L'application $P \mapsto P(u)$ est un morphisme d'algèbre entre $(\mathbb{K}[X], +, \cdot, \times)$ et $(\mathscr{L}(E), +, \cdot, \circ)$.
- → On note $\mathbb{K}[u] = \{P(u), P \in \mathbb{K}[X]\}$,
- → si $d = \deg \mu_u$, alors la famille $(\mathrm{Id}, u, \ldots, u^{d-1})$ est une base de $\mathbb{K}[u] = \mathbb{K}_{d-1}[u]$.

II. Lien avec la diagonalisation

Proposition 106 *(Critère de diagonalisabilité avec les polynômes annulateurs)*

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On a équivalence

- → u est diagonalisable,
- → u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples,
- → le polynôme minimal de u est scindé à racines simples,
- → le polynôme $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$ est annulateur

Proposition 107 *(Endomorphisme induit)*

Si u est diagonalisable et F est stable par u, alors l'endomorphisme induit u_F est diagonalisable.

Exercice 1

Soit f un endomorphisme tel que $(f + id)^3 \circ (f + 2id) = 0$ et $(f + id)^2 \circ (f + 2id) \neq 0$. f est il diagonalisable?

Exercice 2 ***(CCP 91)***

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.
2. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer, en justifiant, le polynôme minimal de A.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$ et en déduire la valeur de A^n.

Exercice 3 ***(CCP 93)***

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie non nulle et $u \in L(E)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$. On notera Id l'application identité sur E.

1. Montrer que $\operatorname{Im} u \oplus \ker u = E$.
2. (a) Énoncer le lemme des noyaux pour deux polynômes.
   (b) En déduire que $\operatorname{Im} u = \ker(u^2 + u + \mathrm{Id})$.
3. On suppose que u est non bijectif. Déterminer les valeurs propres de u. Justifier la réponse.

III. TRIGONALISATION

Propriété 108 *(Caractérisations)*

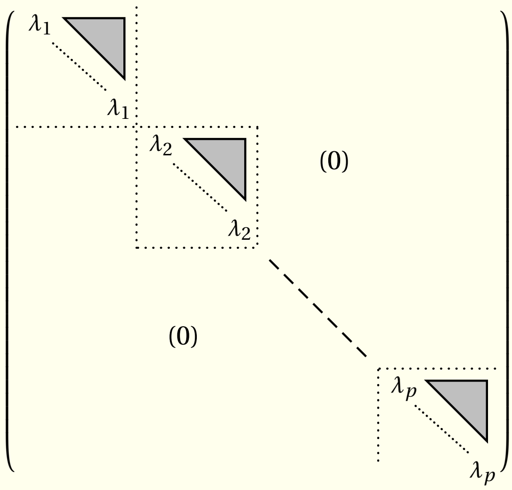
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On a équivalence

→ u est trigonalisable,
→ le polynôme caractéristique χ_u est scindé,
→ u admet un polynôme annulateur scindé.

Proposition 109 *(Trigonalisation)*

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Si u est trigonalisable et $\operatorname{Sp}(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$, alors

→ $E = \bigoplus_{k=i}^{p} F_i$ où F_i est stable par u et l'endomorphisme induit par u sur F_i est $u_i = \lambda_i \mathrm{Id} + \nu_i$ où ν_i est un endomorphisme nilpotent de F_i.
→ la dimension de F_i est égale à la multiplicité de λ_i dans χ_u,
→ il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est



IV. EXERCICES

Exercice 4

Soient $n \geqslant 2$ et ϕ l'endomorphisme qui à toute matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$ associe $\operatorname{tr}(M)I_n - M$.

1. Calculer ϕ^2 et en déduire que ϕ est diagonalisable.
2. Déterminer les valeurs et sous-espaces propres de ϕ.
3. Calculer la trace et le déterminant de ϕ.
4. Calculer le polynôme caractéristique de ϕ.
5. Montrer que ϕ est inversible et déterminer ϕ^{-1}.

Exercice 5 ***(CCP MP 2019)***

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ défini par : $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), f(M) = M + 2\,{}^tM$

1. Donner les valeurs et les espaces propres de f.
2. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Calculer sa trace et son déterminant.

Exercice 6

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^n = I$ et $(I, A, \cdots, A^{n-1})$ est libre. Montrer que $\operatorname{tr}(A) = 0$.

Exercice 7

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I$. Montrer que $\det A > 0$.

Exercice 8

Soit $M \in GL_n(\mathbb{K})$. Montrer que M^{-1} est un polynôme en M.

Exercice 9 ***(Mines MP 2012)***

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(0) = 0$, $P'(0) \neq 0$ et $P(f) = 0$. Montrer que $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$.

Exercice 10 ***(Mines MP 2011)***

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On suppose que $A^2 - 2A$ est diagonalisable et que 1 n'est pas valeur propre de A. Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 11 ***(Mines MP 2010)***

Soit M une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ telle que M^2 est diagonalisable. Montrer que M est diagonalisable si, et seulement si $\ker M = \ker M^2$.

Exercice 12

1. Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence :
$$Sp(A) \cap Sp(B) = \emptyset \iff \chi_A(B) \text{ est inversible.}$$
2. On suppose qu'il existe $P \neq 0$ tel que $A.P = P.B$. Exprimer A^kP en fonction de B et P. Montrer alors que A et B ont une valeur propre commune.
3. Réciproquement, on suppose que A et B ont une valeur propre commune λ. Montrer que λ est valeur propre de ${}^tB$, en déduire qu'il existe $P \in M_n(\mathbb{C})$ non nulle, telle que $AP = PB$.

Exercice 13

Soit u un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$ qui vérifie $u^3 + u = 0$. Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de u est
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 14

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ diagonalisable.

1. Justifier que A admet un polynôme annulateur P, scindé à racines simples et tel que $P(0) = 0$. En déduire que la matrice $B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$ est diagonalisable :
2. A quelle condition la matrice $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 15 ***(Centrale MP 2011)***

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $P = X^2 + aX + b \in \mathbb{R}_2[X]$ sans racine réelle, annulateur de $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que f n'a pas de valeurs propres réelles. En déduire que $\dim E$ est paire.
2. Soit $x \neq 0$ et $y = f(x) + ax$. Montrer que $\mathrm{Vect}(x, y)$ est un plan stable par f.
3. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs, tous les blocs étant de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$.

Exercice 16

Soit $E = M_n(\mathbb{R})$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $A \in E$ une matrice diagonalisable. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A = P(A^{2p+1})$.
2. Soit A, B deux matrices diagonalisables dans E telles que $A^{2p+1} = B^{2p+1}$. Montrer que $A = B$.
3. Le résultat est-il vrai lorsque la puissance est paire ?

Exercice 17

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes :

1. A est nilpotente,
2. A est semblable à une matrice triangulaire supérieure de diagonale nulle,
3. pour tout $k \in [\![1 ; n]\!]$, $\mathrm{tr}(A^k) = 0$.

Exercice 18

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. On considère l'application

$$\Phi_u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E) & \to & \mathscr{L}(E) \\ v & \mapsto & v \circ u \end{array} \right.$$

Montrer que Φ_u est diagonalisable si et seulement si u l'est.

Exercice 19 ***(Mines MP 2017)***

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Déterminer les polynômes P tels que $P(A)$ soit nilpotente.

Exercice 20 ***(Mines MP 2016)***

Soient n, p dans $\mathbb{N}^*$, $A, B_1, \dots, B_p$ dans $M_n(\mathbb{C})$, $b_1, \dots, b_p$ des complexes distincts. On suppose que pour tout $k \in [\![0 ; p]\!]$, $A^k = \sum_{i=1}^{p} b_i^k B_i$.

1. Montrer que pour $i \in [\![1 ; p]\!]$, $B_i \in \mathbb{C}[A]$.
2. Montrer que A est diagonalisable.
3. Calculer A^k pour $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 21 ***(Mines MP 2021)***

Soit $n \geqslant 3$ un entier, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$ et C la matrice de permutation associée au n-cycle $(12 \dots n)$.

1. Quel est le sous-groupe G de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ engendré par B et C ?
2. Quels sont les éléments de G diagonalisables sur $\mathbb{R}$?

Exercice 22 ***(Mines MP 2018)***

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $M \in M_n(\mathbb{R})$ diagonalisable et $\mathcal{C}(M) = \{A \in M_n(\mathbb{R}), AM = MA\}$. Montrer l'équivalence entre

1. M possède n valeurs propres distinctes,
2. $\dim \mathcal{C}(M) = n$,
3. pour tout $A \in \mathcal{C}(M)$, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$, $A = P(M)$.
4. pour tout $A, B \in \mathcal{C}(M)$, $AB = BA$.

Exercice 23 ***(Centrale MP 2021)***

Soient $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice p et u l'endomorphisme de $E = \mathbb{C}^n$ qui lui est canoniquement associé.

1. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $\mathscr{B}_u(x) = \left(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x)\right)$ soit libre.
2. On note $F = \text{Vect}\mathscr{B}_u(x)$. Montrer que $\mathscr{B}_u(x)$ est une base de F et que F est stable par u. Donner la matrice J_p, dans la base $\mathscr{B}_u(x)$, de l'endomorphisme induit par u sur F.
3. Montrer qu'il existe une forme linéaire ϕ sur E telle que $\phi\left(u^{p-1}(x)\right) \neq 0$. Montrer que $\left(\phi \circ u^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant p-1}$ est libre.
4. On note $G = \bigcap\limits_{0 \leqslant k \leqslant p-1} \ker\left(\phi \circ u^k\right)$. Montrer que G est stable par u et que $F \oplus G = E$.
5. Montrer que N est semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme J_r, puis que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de la forme $\lambda I_r + J_r$.

Exercice 24 ***(Centrale MP 2015)***

On dit qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ vérifie la propriété (P) si $A + {}^t\text{Com}(A)$ est une matrice scalaire.

1. Traiter le cas $n = 2$. Dans toute la suite on pose $n > 2$.
2. Rappeler le lien entre comatrice et inverse de A lorsque A est inversible.
3. Pour $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$, montrer que $\text{Com}(AB) = \text{Com}(A)\text{Com}(B)$.
4. Montrer que si $A \in GL_n(\mathbb{C})$ vérifie (P) alors les matrices semblables à A vérifient également (P).
5. Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ non scalaire n'ayant qu'une seule valeur propre. Montrer que A vérifie (P) si et seulement si il existe N telle que $N^2 = 0$ et μ une racine $(n-2)$-ième de l'unité telles que $A = \mu I_n + N$.
6. On suppose que A vérifiant (P) possède au moins deux valeurs propres distinctes. Montrer que A est diagonalisable et conclure.