22 FAMILLES SOMMABLES

I. DÉNOMBRABILITÉ

PARTIES DE $\mathbb{N}$

Définition 52 *(Parties finies et infinies de $\mathbb{N}$)*

- → On définit $[\![1\,;n]\!] = \{k \in \mathbb{N}, 1 \leqslant k \leqslant n\}$ - valable pour $n = 0$ avec $[\![1\,;0]\!] = \{n \in \mathbb{N}^*, 1 \leqslant k \leqslant 0 \leqslant 0\} = \emptyset$.
- → S'il existe une bijection entre $[\![1\,;n]\!]$ et $[\![1\,;m]\!]$, alors $m = n$.
- → Une partie de $\mathbb{N}$ est finie lorsqu'elle est en bijection avec un ensemble $[\![1\,;n]\!]$. Son cardinal est alors n (unique)
- → Une partie de $\mathbb{N}$ qui n'est pas finie est dite infinie.
- → Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est en bijection avec $\mathbb{N}$.

Démonstration : si A est une partie infinie de $\mathbb{N}$, on peut construire une bijection entre A et $\mathbb{N}$ à l'aide de la suite (a_n) définie par $a_0 = \min A$ puis $a_n = \min\{x \in A, x > a_{n-1}\}$ si $n \in \mathbb{N}^*$.

ENSEMBLES DÉNOMBRABLES

Définition 53 *(Ensemble (au plus) dénombrable)*

On dit que E est
- → fini lorsqu'il est en bijection avec une partie finie de $\mathbb{N}$,
- → dénombrable lorsqu'il est en bijection avec $\mathbb{N}$,
- → au plus dénombrable lorsqu'il est fini ou dénombrable, c'est-à-dire lorsqu'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.

Afin de ne pas avoir à distinguer les deux situations (fini ou dénombrable), on donne les caractérisations suivantes qui permettent de montrer qu'un ensemble est au plus dénombrable.

Proposition 88 *(Caractérisations pratiques)*

- → Un ensemble E est au plus dénombrable si et seulement si il existe une **injection** de E dans $\mathbb{N}$ (ou dans un ensemble dénombrable).
- → Un ensemble non vide E est au plus dénombrable si et seulement si il existe une **surjection** de $\mathbb{N}$ (ou d'un ensemble dénombrable) sur E.

EXEMPLE - ENSEMBLES DÉNOMBRABLES USUELS

- → $\mathbb{N}$,$\mathbb{Z}$,$\mathbb{Q}$ sont dénombrables
- → $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, $\mathbb{Z}^2$, $\mathbb{N}^p$ et $\mathbb{Z}^p$ également ($p \in \mathbb{N}^*$).

Remarque : pour $\mathbb{N}^2$, on peut compter « en diagonale », mais la bijection n'est pas simple à écrire explicitement. On peut aussi utiliser l'unicité de la décomposition d'un entier non nul sous la forme $n = 2^p(2q+1)$ et considérer la bijection

$$(p,q) \in \mathbb{N}^2 \mapsto 2^p(2q+1) \in \mathbb{N}^*.$$

Propriété 89 *(Opérations sur les ensembles finis ou dénombrables)*

- → si $B \subset A$ et A est au plus dénombrable, alors B est au plus dénombrable. Il en est de même si B s'injecte dans A.
- → si A et B sont au plus dénombrables alors $A \times B$ aussi.
- → un produit fini d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.
- → si I est un ensemble au plus dénombrable, si pour tout $i \in I$, A_i est une partie au plus dénombrable d'un ensemble E alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ est une partie de E au plus dénombrable.

Démonstration :
- → si $\varphi : A \to \mathbb{N}$ est une injection alors la restriction de φ à B est encore injective dans $\mathbb{N}$. Si ψ est un injection de B dans A, on considère $\varphi \circ \psi$.
- → si $\varphi_A : A \to \mathbb{N}$ et $\varphi_B : B \to \mathbb{N}$ sont injectives alors $\theta : A \times B \to \mathbb{N}^2$ telle que $\theta((a,b)) = (\varphi_A(a), \varphi_B(b))$ est injective. Par récurrence, on généralise à tout produit fini de parties au plus dénombrables.
- → soit, pour $i \in I$, une surjection $f_i : \mathbb{N} \to A_i$ (si A_i est vide, on le supprime de la liste). L'application $\varphi : (i,n) \in I \times \mathbb{N} \mapsto f_i(n)$ est une surjection de $I \times N$ (qui est dénombrable) sur la réunion considérée.

TECHNIQUES PLUS ÉVOLUÉES

EXEMPLE - PAR RÉUNION : ENTIERS ÉLGÉBRIQUES

on dit que $x \in \mathbb{R}$ est un entier algébrique lorsqu'il est racine d'un polynôme non nul de $\mathbb{Z}[X]$.

→ si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$ et $a_n \neq 0$, on note $\varphi(P) = n + \sum_{k=0}^{n} |a_k|$. Pour $q \in \mathbb{N}^*$ donné, il n'existe qu'un nombre fini de polynômes P tels que $\varphi(P) = q$. Chaque polynôme P vérifiant $\varphi(P) = q$ est de degré strictement inférieur à q et a donc au maximum q racines. On note alors $E_q = \{x \in R, \exists P \in \mathbb{Z}[X], P(x) = 0 \text{ et } \varphi(P) = q\}$. Cet ensemble est fini.

→ si x est un entier algébrique alors il est dans l'un de ces ensembles. La réunion de tous ces ensembles est au plus dénombrable (et comme $\mathbb{Z}$ est dedans, l'ensemble est finalement dénombrable).

EXEMPLE - UTILISATION DE $\mathbb{Q}$

→ Si $(O_i)_{i\in I}$ est une réunion d'ouverts non vides 2 à 2 disjoints de $\mathbb{R}$ alors I est au plus dénombrable. La démonstration est assez simple. Pour tout $i \in I$, il existe un rationnel $p_i \in O_i$ (ouvert non vide de $\mathbb{R}$). Si $i \neq j$, alors $p_i \neq p_j$ puisque les ouverts sont deux à deux disjoints. L'application $i \in I \mapsto p_i \in Q$ est donc injective.

→ Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est croissante alors l'ensemble de ses points de discontinuité est au plus dénombrable :

- version 1 : on note $M = f(b) - f(a)$. Si x est dans $[a, b]$, on note $f(x^+)$ et $f(x^-)$ les limites à droite et à gauche de f (sauf aux bords où on note $f(b^+) = f(b)$ et $f(a^-) = f(a)$). On note $A_n = \{x \in]a, b[, f(x^+) - f(x^-) \geqslant M/n\}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque f est croissante, A_n contient au plus n éléments. Si x est un point de discontinuité de f alors il est dans l'un des A_n. La réunion $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$ est au plus dénombrable.
- version 2 : comme dans l'exemple précédent, si x est un point de discontinuté de f alors $]f(x^-), f(x^+)[$ est un ouvert non vide donc il contient un rationnel. On construit ainsi une injection de l'ensemble des points de discontinuité de f dans $\mathbb{Q}$.

ENSEMBLES NON DÉNOMBRABLES

Partie plus difficile, donnée en complément

Proposition 90

L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Démonstration :

→ par procédé diagonal et développement décimal,

→ avec le résultat suivant : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels, alors il existe un réel ℓ qui n'est pas un terme de la suite. Pour ce résultat, on construit une suite de segments emboités $[a_n, b_n]$ de sorte que $u_n \notin [a_n, b_n]$ en coupant $[a_n, b_n]$ en trois morceaux pour être certain que l'un des trois ne contient pas u_n (un dichotomie simple ne suffit pas, car le point milieu pourrait être u_n). On montre alors que la limite ℓ de a_n et b_n n'est pas l'un des termes de la suite puisque $\ell \in [a_n, b_n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_n \notin [a_n, b_n]$.

Proposition 91 *(Théorème de Cantor)*

Il n'existe pas de bijection entre un ensemble E et l'ensemble de ses parties $\mathcal{P}(E)$.

Démonstration : supposons qu'il existe une bijection $f : E \to \mathcal{P}(E)$. On considère $X = \{x \in E, x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(E)$. soit y un antécédent de $X = f(y)$. Si $y \in X$ alors $y \notin f(y) = X$ ce qui donne une contradiction, mais si $y \notin X = f(y)$ alors $y \in X$ d'où une nouvelle contradiction.

Proposition 92

→ $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable

→ $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est isomorphe à $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Ils sont tous les deux en bijection avec $\mathbb{R}$.

→ de façon générale, $\mathscr{P}(E)$ est isomorphe à $\{0, 1\}^E$ (avec $A \subset E \mapsto \chi_A$)

→ $\mathbb{R}$ et $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ sont non dénombrables et non isomorphes.

Remarque : À partir de $\mathbb{N}$, on obtient des ensembles infinis de plus en plus gros (dans le sens où il y a une injection mais pas de bijection) $\mathbb{N}$, $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathbb{N}))$...

II. FAMILLES SOMMABLES DE RÉELS POSITIFS

Important : dans cette partie, $(u_i)_{i\in I}$ désigne une famille de réels **positifs ou nuls** indexée par un ensemble I dénombrable.

Définition 54 *(Famille sommable)*

→ On dit que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, lorsqu'il existe $M\in\mathbb{R}$ tel que, pour toute partie finie $J\subset I$, $\displaystyle\sum_{j\in J} u_j \leqslant M$

→ on note alors $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \sup_{J\subset I, J \text{ fini}}\left(\sum_{j\in J} u_j\right)$.

Propriété 93 *(familles sommables à termes positifs)*

→ Si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable et $I'\subset I$, alors $(u_i)_{i\in I'}$ est sommable (de somme inférieure).
→ Si, pour tout $i\in I$, $0\leqslant v_i\leqslant u_i$ et $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $(v_i)_{i\in I}$ est sommable et $0\leqslant \displaystyle\sum_{i\in I} v_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i$.

Proposition 94 *(Lien avec les séries)*

Soit $\sum a_n$ est une série à termes positives :
→ la famille $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si $\sum a_n$ converge,
→ et dans ce cas $\displaystyle\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i$.

Théorème 20 *(Sommation par paquets)*

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs. On suppose que I est réunion disjointe d'ensembles I_λ pour $\lambda\in\Lambda$ avec Λ au plus dénombrable. On a **équivalence** entre
→ $(u_i)_{i\in I}$ est sommable
→ pour tout $\lambda\in\Lambda$, $(u_i)_{i\in I_\lambda}$ est sommable de somme $s_\lambda = \displaystyle\sum_{i\in I_\lambda} u_i$, et la famille $(s_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est sommable

On a alors $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \sum_{\lambda\in\Lambda}\left(\sum_{i\in I_\lambda} u_i\right)$.

Remarque : le cas usuel est d'avoir $\Lambda=\mathbb{N}$ et une partition $I=\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$.

Démonstration :

→ sens réciproque : soit J une sous-famille finie de I. Il existe un nombre finie d'indices $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ tels que cette famille soit contenue dans $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} I_{\lambda_i}$. On note alors $J_i = I_{\lambda_i}\cap J$. On a

$$\sum_{j\in J} u_i = \sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j\in I_{\lambda_i}} u_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{k} s_{\lambda_i} \leqslant \sum_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda.$$

Ce dernier terme étant constant, on a prouvé que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable et que $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i \leqslant \sum_{\lambda\in\Lambda}\left(\sum_{i\in I_\lambda} u_i\right)$.

→ sens direct : Puisque $I_\lambda\subset I$, la famille $(u_i)_{i\in I_\lambda}$ est évidemment sommable. Il reste à montrer que les sommes finies des s_λ sont majorées. Soient $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ un ensemble fini de ces indices (dans Λ). On veut montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} s_{\lambda_i} \leqslant \sum_{i\in I} u_i$. Puisque chaque terme s_{λ_i} peut contenir une infinité de termes de la famille des u_i, ce n'est pas immédiat. Considérons alors des sous-ensembles finis quelconques $J_{\lambda_1},\dots,J_{\lambda_p}$ d'indices avec $J_{\lambda_i}\subset I_{\lambda_i}$. Pour toutes ces familles finies, la réunion $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{p} J_{\lambda_i}$ est finie donc

$$\sum_{j=1}^{p}\sum_{i\in J_{\lambda_j}} u_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i.$$

Fixons les indices 1 à $p-1$:

$$\sum_{j=1}^{p}\sum_{i\in J_{\lambda_j}} u_i = \sum_{j=1}^{p-1}\left(\sum_{i\in J_{\lambda_j}} u_i\right) + \sum_{i\in J_{\lambda_p}} u_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i.$$

Cette relation est valable pour toute sous-famille $J_{\lambda_p}\subset I_{\lambda_p}$. En passant à la borne supérieure lorsqu'on décrit les parties finies de I_{λ_p}, on a

$$\sum_{j=1}^{p-1}\left(\sum_{i\in J_{\lambda_j}} u_i\right) + s_{\lambda_p} \leqslant \sum_{i\in I} u_i.$$

On fait de même pour les autres termes et on obtient $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} s_{\lambda_j} \leqslant \sum_{i\in I} u_i$. Finalement, la famille $(s_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est sommable et sa somme est majorée par $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i$.

Lorsque l'une des deux conditions est vérifiée, les deux le sont et on obtient les deux inégalités donc l'égalité entre les deux sommes.

III. FAMILLES SOMMABLES

Définition 55 *(Famille sommable)*

- On dit que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, lorsque la famille $(|u_i|)_{i\in I}$ est sommable
- Si $u_i \in \mathbb{R}$ pour tout $i \in I$, on note $u_i^+ = \max(0, u_i)$ et $u_i^- = \max(0, -u_i)$. Les familles $(u_i^+)_{i\in I}$ et $(u_i^-)_{i\in I}$ sont sommables et on pose
$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^-.$$
- Si $u_j \in \mathbb{C}$ pour tout $j \in I$, les familles de réels $(\mathrm{Re}(u_j))_{j\in I}$ et $(\mathrm{Im}(u_j)_{j\in I}$ sont sommables et on pose
$$\sum_{j\in I} u_j = \sum_{j\in I} \mathrm{Re}(u_j) + i\sum_{j\in I} \mathrm{Im}(u_j).$$

On a cette proposition qui indique qu'il existe une certaine partie finie qui permet de bien approcher la somme de la famille. On a plusieurs versions du résultat :

Proposition 95

Soit $((u_i)_{i\in I}$ une famille sommable et s sa somme.

- *version au programme :* pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie $J \subset I$ telle que $\left|\sum_{i\in J} u_i - s\right| < \varepsilon$,
- *version améliorée :* pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie $J \subset I$ telle que, pour toute partie finie K qui contient J, $\left|\sum_{i\in K} u_i - s\right| < \varepsilon$

Remarque : la version améliorée revient à dire que les termes de $I\setminus J$ donnent des sommes petites. On le démontre en considérant une partie finie J telle que
$$\sum_{i\in I} |u_i| - \varepsilon \leqslant \sum_{i\in J} |u_i| \leqslant \sum_{i\in I} |u_i|$$
et ainsi $\sum_{i\in I\setminus J} |u_i| \leqslant \varepsilon$. Si K est finie et contient J alors $I\setminus K \subset I\setminus J$ et ainsi $\sum_{i\in I\setminus K} |u_i| \leqslant \varepsilon$.

On utilise par exemple ce résultat dans la démonstration du théorème de sommation par paquets (afin de se ramener à des sommes finies, la contribution restante étant petite).

Propriété 96 *(Familles sommables quelconques)*

- linéarité
- si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable et $\sigma : I \to I$ est une bijection alors $(u_{\sigma(i)})_{i\in I}$ est sommable et les sommes sont égales.

Théorème 21 *(Sommation par paquets)*

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable. On suppose que I est réunion disjointe d'ensembles I_λ pour $\lambda \in \Lambda$ avec Λ au plus dénombrable. On a alors

- pour tout $\lambda \in \Lambda$, $(u_i)_{i\in I_\lambda}$ est sommable de somme $s_\lambda = \sum_{i\in I_\lambda} u_i$
- la famille $(s_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est sommable et $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{\lambda\in\Lambda}\left(\sum_{i\in I_\lambda} u_i\right)$.

Remarque : par rapport au théorème sur les familles positives, on a perdu l'équivalence

Proposition 97 *(théorème de Fubini)*

Si $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_j)_{j\in J}$ sont sommables (avec I et J au plus dénombrables) alors la famille $(u_i v_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable et
$$\sum_{(i,j)\in I\times J} u_i v_j = \left(\sum_{i\in I} u_i\right)\left(\sum_{j\in J} v_j\right)$$

MÉTHODE

On veut écrire la somme d'une famille $(u_i)_{i\in I}$ de plusieurs manières ou la calculer (par paquets) :

- → on prouve que la famille est sommable : on passe en module ou valeur absolue et on montre que la famille est sommable. Pour cela on le montre directement ou à l'aide d'une sommation par paquets sur la famille $(|u_i|)_{i\in I}$
- → une fois qu'on a prouvé la sommabilité, on peut effectuer tout type de paquets pour calculer la somme.

IV. SOMMES DOUBLES

Théorème 22 *(Sommes doubles à termes positifs)*

Soit une famille de **réels positifs** $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$. La famille est sommable si et seulement si

- → pour tout $m\in\mathbb{N}$, la série $\sum\limits_n a_{m,n}$ converge,
- → la série $\sum\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}\right)$ converge

On a alors $\sum\limits_{m=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}\right) = \sum\limits_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_{m,n}$.

Remarque : on peut échanger les rôles de m et n dans la caractérisation.

Théorème 23 *(Sommes doubles quelconques)*

Soit une famille de réels ou de complexes $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$. La famille est sommable si et seulement si

- → pour tout $m\in\mathbb{N}$, la série $\sum\limits_n |a_{m,n}|$ converge,
- → la série $\sum\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_{m,n}|\right)$ converge

On a alors $\sum\limits_{m=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}\right) = \sum\limits_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_{m,n}$ (ainsi qu'un résultat similaire avec $|a_{m,n}|$).

Théorème 24 *(Produit de Cauchy)*

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ converge absolument, alors la série $\sum w_n$ où $w_n = \sum\limits_{i=0}^{n} u_i v_{n-i}$ converge absolument et $\left(\sum\limits_{p=0}^{+\infty} u_p\right)\left(\sum\limits_{q=0}^{+\infty} v_q\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n$

Démonstration : avec les hypothèses, la famille $(u_p v_q)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_p v_q = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n \text{ où } w_n = \sum_{i=0}^{n} u_i v_{n-i}$$

Pour montrer que $\sum w_n$ converge absolument, on peut majorer $|w_n| \leqslant \sum\limits_{i=0}^{n} |u_i||v_{n-i}|$ et appliquer le théorème de sommation par paquets à la famille $(|u_p||v_q|)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$

V. EXERCICES

Exercice 1

Pour quelles valeurs de α la famille $\left(\dfrac{1}{(p^2+q^2)^\alpha}\right)_{p,q\geqslant 1}$ est-elle sommable?

Exercice 2

1. Soit $\alpha > 1$. Donner un équivalent de $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^\alpha}$.
2. Lorsque cela a un sens, montrer que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} R_n = \sum\limits_{p=1}^{+\infty} \dfrac{1}{p^{\alpha-1}}$.

Exercice 3

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs où I est quelconque. On suppose qu'il existe M tel que, pour toute partie finie $J \subset I$, on a $\sum\limits_{i\in J} u_i \leqslant M$. À l'aide des ensembles $M_k = \left\{i \in I, u_i \geqslant \frac{1}{k}\right\}$, montrer que $\{i \in I, u_i \neq 0\}$ est fini ou dénombrable.

Exercice 4

Montrer que pour tout x tel que $|x| < 1$, on a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^{2n}}$.

Exercice 5

Montrer que pour $z \in \mathbb{C}\setminus(-\mathbb{N})$, on a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)} = e\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$$

Exercice 6

Soit (a_n) une suite de réels positifs ou nuls. On suppose que $\sum a_n$ converge. Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} k\left(\sum\limits_{n=k}^{+\infty} \frac{a_n}{n(n+1)}\right)$ existe et calculer cette valeur.

Exercice 7 ***(Mines MP 2016)***

Soit $\lambda \in]0,1[$.

1. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n}(1-\lambda)^{k-n}$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite sommable. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n}(1-\lambda)^{k-n}\lambda^k u_k$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable et calculer sa somme.

Exercice 8

Calculer, $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} (-1)^n(\zeta(n)-1)$ où $\zeta(n) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^n}$.

Exercice 9

Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} d(n)x^n$ où $d(n)$ est le nombre de diviseurs positifs de n.

Exercice 10

Montrer que la famille $\left(\frac{(-1)^k}{kn^k}\right)_{n,k\geqslant 2}$ est sommable et en déduire $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}\zeta(k) = \gamma$.

Exercice 11 ✰

Pour $n \geqslant 2$, on note q_n le plus grand diviseur premier de n. Quelle est la nature de la série $\sum \frac{1}{nq_n}$?