21 FONCTIONS VECTORIELLES

I. GÉNÉRALITÉS

CADRE D'ÉTUDE

Le but de ce chapitre est de généraliser les différentes notions abordées sur les fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ aux fonctions **d'une variable réelle** à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie. Dans toute cette partie, F désignera une espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Puisque F est de dimension finie, toutes les normes sur F sont équivalentes. On notera n la dimension de F et $\mathscr{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de F.

I désignera systématiquement un intervalle de $\mathbb{R}$ et X une partie non vide de $\mathbb{R}$.

ESPACE DES FONCTIONS

Proposition 70 *(espaces de fonctions)*

on note F^X ou $\mathscr{F}(X, F)$ l'ensemble des fonctions définies sur X à valeurs dans F. Cet espace a une structure d'espace vectoriel lorsqu'on le munit des opérations suivantes : si f et g sont dans F^X et $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit (possible car F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel) :

$$f+g : \left\{ \begin{array}{ccc} X & \to & F \\ t & \mapsto & f(t)+g(t) \end{array} \right. \qquad \lambda f : \left\{ \begin{array}{ccc} X & \to & F \\ t & \mapsto & \lambda.f(t) \end{array} \right.$$

Lorsque F a une structure d'algèbre (par exemple $\mathbb{K}$, $M_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}[X]$), on peut définir $f.g$ par $(f.g)(x) = f(x).g(x)$.

APPLICATIONS COMPOSANTES

Soit $f \in F^X$. On définit les n applications coordonnées (ou applications composantes) : pour $i \in [\![1 ; n]\!]$, $f_i : \left\{ \begin{array}{ccc} X & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & f_i(x) \end{array} \right.$ telles que, pour tout $x \in X$, on a $f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) e_i$.

LIMITES

On reprend la définition plus générale donnée dans le cadre des espaces vectoriels normés :

Définition 44 *(limites)*

- soit $f : X \to F$, a un point adhérent à X et $\ell \in F$. On dit que f admet ℓ pour limite en a si
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, |x-a| < \eta \Rightarrow \|f(x) - \ell\| \leqslant \varepsilon.$$
Si la limite existe, elle est unique et notée $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.
- soit $f : X \to F$, a un point adhérent à X et $\ell \in F$. On note $f_1, \cdots, f_n$ les applications composantes de f et $\ell_1, \cdots, \ell_n$ les coordonnées de ℓ dans $\mathscr{B}$. On a
$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \iff \forall i \in [\![1 ; n]\!], \lim_{x \to a} f_i(x) = \ell_i.$$
- soit $f : X \to F$ et $\ell \in F$. On suppose que X contient un intervalle du type $[b, +\infty[$. On dit alors que f admet pour limite ℓ en $+\infty$ si
$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in X, x \geqslant A \Rightarrow \|f(x) - \ell\| \leqslant \varepsilon.$$
Si cette limite existe, elle est unique et notée $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
- soit $f : X \to F$ et a un point adhérent à $X' = X \cap [a, +\infty[$ et $l \in F$. On dit que f admet ℓ pour limite en a à droite si
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, |x-a| < \eta \text{ et } x \geqslant a \Rightarrow \|f(x) - \ell\| \leqslant \varepsilon.$$
On définit de manière semblable la limite à gauche.

CONTINUITÉ ET CONTINUITÉ PAR MORCEAUX

Définition 45 *(continuité)*

soit $f : X \to F$ et $a \in X$. On dit que
- → f est continue en a lorsque $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
- → f est continue sur X lorsque f est continue en tout point $a \in X$.

Comme précédemment, f est continue en a si et seulement si chacune de ses applications composantes est continue en a.

Définition 46 *(fonction continue par morceaux)*

- → Soit $f : [a,b] \to F$. On dit que f est continue par morceaux sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision du segment $[a,b]$: $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_m = b$ telle que, pour tout $i \in [\![0; m-1]\!]$, la restriction de f à $]a_i, a_{i+1}[$ est continue sur $]a_i, a_{i+1}[$ et admet une limite finie en a_i à droite et en a_{i+1} à gauche.
- → Soit $f : I \to F$. On dit que f est continue par morceaux sur I si pour tout $[a,b] \subset I$, la restriction de f à $[a,b]$ est continue par morceaux sur $[a,b]$.
- → une fonction est continue par morceaux si et seulement si chacune de ses applications coordonnées l'est.

RAPPELS SUR LES FONCTIONS MONOTONES

Cela n'a de sens que lorsque les fonctions sont à valeurs réelles.

Proposition 71 *(Bijection et réciproque)*

soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement monotone. La fonction f réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$. De plus la bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ est encore continue, strictement monotone de même sens.

Propriété 72 *(monotonie et limite)*

soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ croissante (avec $b > a$). La fonction f admet une limite finie ou infinie en b à gauche.

Démonstration : Soit $A = f([a,b[)$.
- → cas 1 : A est majorée. Soit $M = \sup A$ (existe car A est non vide, majorée). Alors $\forall x \in [a,b[, f(x) \leqslant M$. De plus, pour $\varepsilon > 0, M - \varepsilon$ n'est plus un majorant de A donc il existe $x_0 \in [a,b[$ tel que $f(x_0) \geqslant M - \varepsilon$. Par croissance de f, on a alors $\forall x \in [x_0, b[, M - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant M$. Cela nous donne $\lim_{x\to b^-} f(x) = M$.
- → cas 2 : A n'est pas majorée. Alors pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe $x_0 \in [a,b[$ tel que $f(x_0) > M$ et par croissance de f, $\forall x \in [x_0, b[, f(x) > M$. Ainsi $\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$.

Une autre façon de traduire le résultat suivant :

Propriété 73 *(monotonie et limite)*

soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction monotone, alors f admet une limite (finie ou infinie) à droite et à gauche en tout point de I (sauf aux extrémités de I où il n'y a qu'un coté).

II. DÉRIVATION

DÉRIVÉE EN UN POINT

Définition 47 *(Dérivée en un point)*

- → soit $f : I \to F$ et $a \in I$. On dit que f est dérivable en a de dérivée $\ell \in F$ si $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet ℓ pour limite lorsque x tend vers a. Cette limite est alors notée $f'(a)$ et appelée dérivée de f en a. On définit la dérivée à droite ou à gauche en étudiant la limite à droite ou à gauche. Ces éventuelles dérivées sont notées $f'_d(a)$ et $f'_g(a)$.
- → si f est dérivable en a, alors f est continue en a
- → **composantes** : f est dérivable en a si et seulement si chacune de ses applications coordonnées est dérivable en a (en tant que fonctions à valeurs réelles ou complexes). Dans ce cas, on a $f'(a) = \sum_{i=1}^{n} f'_i(a) e_i$.
- → **fonctions à valeurs complexes** : soit $f : I \to \mathbb{C}$ et $a \in I$. La fonction f est dérivable en a si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont (en tant que fonctions de I vers $\mathbb{R}$) ou si et seulement si $\bar{f}$ l'est. Dans ce cas, on a

$$\mathrm{Re}(f'(a)) = (\mathrm{Re}(f))'(a) \text{ et } \mathrm{Im}(f'(a)) = (\mathrm{Im}(f))'(a).$$

APPLICATIONS DE CLASSE $\mathscr{C}^1$

Définition 48 *(Applications de classe $\mathscr{C}^1$)*

- Soit $f : I \to F$. On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point $a \in I$. On définit alors l'application dérivée, notée f', Df ou $\dfrac{df}{dx}$ sur I par

$$f' : \left\{ \begin{array}{lcl} I & \to & F \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array} \right.$$

- On dit que $f : I \to F$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I si f est dérivable en tout point de I et si l'application f' est continue sur I. On note $\mathscr{C}^1(I, F)$ l'ensemble des applications de classe $\mathscr{C}^1$ de I à valeurs dans F.

Propriété 74 *(Propriétés algébriques)*

soit f et g deux applications de $\mathscr{C}^1(I, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
- $\mathscr{C}^1(I, F)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
- $\forall a \in I, (f + \lambda g)'(a) = f'(a) + \lambda g'(a)$.
- **composition avec une application linéaire** : si $u \in \mathscr{L}(F, G)$ où G est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, alors $u(f) = u \circ f$ est une application de classe $\mathscr{C}^1$ de I vers G et pour tout $a \in I, (u \circ f)'(a) = u(f'(a))$.
- **produit avec une fonction scalaire** : si $\mu : I \to \mathbb{K}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, alors $\mu f \in \mathscr{C}^1(I, F)$ et

$$\forall a \in I, (\mu f)'(a) = \mu'(a) f(a) + \mu(a) f'(a).$$

- **dérivée composée** : soit $g \in \mathscr{C}^1(J, F)$ et $f \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$, avec $f(I) \subset J$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$. On a $g \circ f \in \mathscr{C}^1(I, F)$ sur I et $(g \circ f)' = f'.(g' \circ f)$.

Démonstration :
- les deux premiers points se démontrent de façon usuelle et par les propriétés sur les limites.
- On utilise la linéarité de u : on pose $g = u \circ f$ et on a

$$\frac{g(a+h) - g(a)}{h} = u\left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h}\right).$$

  Or $u \in \mathscr{L}(F, G)$ et F et G sont de dimension finie donc u est continue sur F. Alors par composition des limites, on obtient $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = u(f'(a))$.
- Démonstration usuelle sur les limites (μ est à valeurs dans $\mathbb{K}$ pour pouvoir multiplier) :

$$\begin{array}{ll} & \dfrac{(\mu f)(a+h) - (\mu f)(a)}{h} \\ = & \dfrac{(\mu(a+h) - \mu(a)) f(a+h) + \mu(a)(f(a+h) - f(a))}{h} \\ = & \dfrac{\mu(a+h) - \mu(a)}{h} f(a+h) + \mu(a) \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \end{array}$$

  Les opérations sur les limites donnent le résultat.

Proposition 75 *(Bilinéarité, multilinéarité)*

soit
- F, G et H des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.
- $f \in \mathscr{C}^1(I, F)$ et $g \in \mathscr{C}^1(I, G)$
- $B : F \times G \to H$ bilinéaire

$$B(f, g) : \left\{ \begin{array}{lcl} I & \to & H \\ x & \mapsto & B(f(x), g(x)) \end{array} \right.$$

est une application de classe $\mathscr{C}^1$ de I vers H et

$$\forall a \in I, \big(B(f, g)\big)'(a) = B(f'(a), g(a)) + B(f(a), g'(a)).$$

On a un résultat similaire pour les applications multilinéaire (on a une somme dans laquelle on a dérivé séparément sur chaque variable)

Démonstration : Elle se réalise comme dans la démonstration précédente avec μf en utilisant la continuité d'une application bilinéaire définie sur des espaces de dimension finie :

$$\begin{array}{ll} & B(f(a+h), g(a+h)) - B(f(a), g(a)) \\ = & B(f(a+h) - f(a) + f(a), g(a+h)) - B(f(a), g(a)) \\ = & B(f(a+h) - f(a), g(a+h)) + B(f(a), g(a+h)) - B(f(a), g(a)) \\ = & B(f(a+h) - f(a), g(a+h)) + B(f(a), g(a+h) - g(a)) \end{array}$$

On divise alors par h, on utilise la linéarité et on fait tendre h vers 0, en utilisant la continuité de B et le théorème de composition de limites.

EXEMPLE - UTILISATION DU RÉSULTAT PRÉCÉDENT

- Soit $(F,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et f et g des applications $\mathscr{C}^1(I,F)$, la fonction $h : t \mapsto \langle f(t), g(t)\rangle$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et
$$h'(t) = \langle f'(t), g(t)\rangle + \langle f(t), g'(t)\rangle.$$
- Soit $(F,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et $f \in \mathscr{C}^1(I,F)$. La fonction $h : t \mapsto \|f(t)\|^2$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et
$$h'(t) = 2\langle f(t), f'(t)\rangle.$$
- Soit $(F,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien orienté de dimension 3, et f et g des applications de classe $\mathscr{C}^1(I,F)$. La fonction $h : t \mapsto f(t)\wedge g(t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et
$$h'(t) = f'(t)\wedge g(t) + f(t)\wedge g'(t).$$

Proposition 76 *(Caractérisation des applications constantes)*

soit $f : I \to F$ continue sur I et dérivable sur l'intérieur de I. La fonction f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$ sur l'intérieur de I.

Démonstration : f est constante si et seulement si chacune des applications coordonnées est constante. On se ramène ainsi au cas d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{K}$.

APPLICATIONS DE CLASSE $\mathscr{C}^k$

Définition 49 *(Applications de classe $\mathscr{C}^k$)*

- On définit les dérivées d'ordre k de $f : I \to F$ de proche en proche (ou par récurrence). On note $f^{(k)}$ la dérivée de la fonction $f^{(k-1)}$ (lorsque c'est possible).
- Au lieu de $f^{(n)}(a)$, on peut noter $(D^n f)(a)$ ou $\dfrac{d^n f}{dx^n}(a)$. De même on peut noter $D^n f$ ou $\dfrac{d^n f}{dx^n}$ l'application $f^{(n)}$ lorsqu'elle existe.
- On dit qu'une application f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I si f est n fois dérivable sur I et si pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $f^{(k)}$ est continue sur I. On note $\mathscr{C}^n(I,F)$ l'ensemble des applications de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.
- On dit qu'une application f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I si f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathscr{C}^\infty(I,F)$ l'ensemble des applications de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.

Propriété 77

opérations
- Les espaces $\mathscr{C}^k(I,F)$ et $\mathscr{C}^\infty(I,F)$ sont des espaces vectoriels.
- $(f+\alpha g)^{(k)} = f^{(k)} + \alpha g^{(k)}$ dans $\mathscr{C}^k(I,F)$.
- f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I si et seulement si chacune de ses applications coordonnées l'est.
- soit $g \in \mathscr{C}^k(J,F)$ et $f \in \mathscr{C}^k(I,\mathbb{R})$ avec $f(I) \subset J$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$. Alors $g\circ f \in \mathscr{C}^k(I,F)$.

FONCTIONS À VALEURS DANS $\mathbb{K}$

Proposition 78 *(cas $F = \mathbb{K}$)*

soit $k \leqslant +\infty$ ($k \in \mathbb{N}$ ou $k = +\infty$).
- On note $\mathscr{C}^k(I) = \mathscr{C}^k(I,\mathbb{K})$.
- L'ensemble $\mathscr{C}^k(I)$ est une algèbre.
- Si f et g sont dans $\mathscr{C}^k(I)$, alors $f.g$ également, et on a la formule de Leibniz :
$$(f.g)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i)}$$
- **fonction réciproque** : soit $f \in \mathscr{C}^1(I,J)$ bijective. Si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J avec, pour tout $y \in J$, $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$. Si de plus f est $\mathscr{C}^k$ sur I, alors f^{-1} est également de classe $\mathscr{C}^k$ sur J.

Proposition 79 *(Difféomorphisme)*

→ soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On dit que f est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme de I sur J si
- f est une bijection de I sur J.
- f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.
- f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^k$ sur J.

→ **Caractérisation des difféomorphismes** : soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $k \geqslant 1$ et $f : I \to J = f(I)$ de classe $\mathscr{C}^k$. La fonction f est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme de I sur $J = f(I)$ si et seulement si f' ne s'annule pas sur I.

FONCTIONS À VALEURS MATRICIELLES

On peut appliquer les résultats précédents au cas des fonctions à valeurs dans les espaces de matrices

Propriété 80 *(Fonctions à valeurs matricielles)*

→ Soit $A : I \to M_{pq}(\mathbb{K})$. On note $A(t) = (a_{ij}(t))$. La fonction A est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I si et seulement si chacune des applications $a_{ij} \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{K})$, et $A'(t) = (a'_{ij}(t))$.

→ Soit A et B de classe $\mathscr{C}^1(I, M_{pq}(\mathbb{K}))$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, alors $A + \alpha B \in \mathscr{C}^1(I, M_{pq}(\mathbb{K}))$ et

$$\forall t \in I, (A+\alpha B)'(t) = A'(t) + \alpha B'(t).$$

→ Soit $A \in \mathscr{C}^1(I, M_{pq}(\mathbb{K}))$ et $B \in \mathscr{C}^1(I, M_{qr}(\mathbb{K}))$, alors $AB \in \mathscr{C}^1(I, M_{pr}(\mathbb{K}))$ et

$$\forall t \in I, (A.B)'(t) = A'(t).B(t) + A(t).B'(t).$$

→ Soit $A \in \mathscr{C}^1(I, M_{pq}(\mathbb{K}))$, alors ${}^tA \in \mathscr{C}^1(I, M_{qp}(\mathbb{K}))$ et

$$\forall t \in I, ({}^tA)'(t) = {}^tA'(t).$$

→ Soit $A \in \mathscr{C}^1(I, M_p(\mathbb{K}))$ telle que, pour tout $t \in I$, $A(t)$ est inversible. Alors

$$A^{-1} : \begin{cases} I & \to & GL_p(\mathbb{K}) \\ t & \mapsto & A^{-1}(t) \end{cases}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et

$$\forall t \in I, (A^{-1})'(t) = -A^{-1}(t).A'(t).A^{-1}(t).$$

Démonstration :

1. immédiat.
2. immédiat.
3. On utilise l'application bilinéaire B définie par

$$B : \begin{cases} M_{pq}(\mathbb{K}) \times M_{qr}(\mathbb{K}) & \to & M_{pr}(\mathbb{K}) \\ (A,B) & \mapsto & A.B \end{cases}$$

4. on utilise l'application linéaire

$$u : \begin{cases} M_{pq}(\mathbb{K}) & \to & M_{qp}(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto & {}^tA \end{cases}$$

5. Puisque pour tout $t \in I$, $A(t)$ est inversible, on peut écrire

$$A^{-1}(t) = \frac{1}{\det A(t)} {}^t\mathrm{Com} A(t).$$

On montre que cette application est bien de classe $\mathscr{C}^1$: elle ne fait intervenir que des fractions en les coefficients de $A(t)$. Le dénominateur est $\det(A(t))$ qui ne s'annule pas. Une fois cela démontré, on écrit $A(t).A^{-1}(t) = I_n$. On dérive cette relation puisqu'on sait que c'est possible, pour obtenir $\forall t \in I, A'(t).A^{-1}(t) + A(t).(A^{-1})'(t) = 0$, puis le résultat.

RAPPELS : ROLLE ET ACCROISSEMENTS FINIS

Attention

Uniquement le cas réel Cette partie n'est valable que dans le cas d'une fonction à valeurs **réelles**. On désigne par a et b deux réels tels que $b > a$.

Théorème 18 *(théorème de Rolle)*

soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Proposition 81 *(Accroissements finis)*

→ **Égalité** : soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.
→ **Inégalité** : soit f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ et $M = \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|$. On a $|f(b) - f(a)| \leqslant M|b-a|$.

Remarques :

→ L'inégalité se généralise (voir plus loin) pour les fonctions à valeurs vectorielles mais la démonstration fait intervenir les résultats d'intégration.
→ Le théorème de Rolle ne se généralise pas : soit

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & e^{2i\pi t} \end{array} \right.$$

Alors f est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et $f(0) = f(1) = 1$. Comme $f'(t) = 2i\pi e^{2i\pi t}$, f' ne s'annule jamais.

III. INTÉGRATION SUR UN SEGMENT

CONSTRUCTION DE L'INTÉGRALE

La construction de l'intégrale d'une fonction continue ou continue par morceaux sur un segment $[a,b]$ à valeurs dans F se fait suivant le cheminement suivant :

1. On définit d'abord l'ensemble des fonctions en escalier : soit $f : [a,b] \to F$, on dit que f est en escalier s'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_m = b$ telle que f est constante sur chacun des intervalles $]a_i, a_{i+1}[$. On note f_i la constante sur cet intervalle (pour la suite). Cette constante est une constante de F (donc un vecteur). L'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$ est un espace vectoriel.

2. On définit pour une telle fonction (même notation qu'au dessus) son intégrale par

$$\int_{[a,b]} f = \sum_{k=0}^{m-1} (a_{i+1} - a_i) f_i$$

et on montre que cette définition ne dépend pas de la subdivision choisie.

3. On montre les propriétés usuelles pour l'intégrale sur l'espace des fonctions en escalier sur $[a,b]$ à valeurs dans F :
   → Linéarité
   → Norme : l'application $\|f\|$ est une fonction en escalier de $[a,b]$ vers $\mathbb{R}$, et $\left\| \int_{[a,b]} f \right\| \leqslant \int_{[a,b]} \|f\|$.
   → Composition avec une application linéaire : si $\varphi \in \mathscr{L}(F,G)$, alors l'application $\varphi \circ f$ est une fonction escalier de $[a,b]$ vers G et

$$\varphi\left(\int_{[a,b]} f\right) = \int_{[a,b]} \varphi \circ f.$$

4. Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$, alors il existe une suite de fonctions en escalier sur $[a,b]$ qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$. Soit (f_n) une telle suite de fonctions en escalier. On montre alors que
   → La suite $\int_{[a,b]} f_n$ est convergente (on montre qu'elle est bornée donc dans un compact d'un espace de dimension finie avec une seule valeur d'adhérence)
   → Si on a deux suites de fonctions en escalier (f_n) et (g_n) qui convergent uniformément vers f, alors les suites des intégrales ont même limite :

$$\begin{array}{rcl} \left\| \int_{[a,b]} f_n - \int_{[a,b]} g_n \right\| & \leqslant & \int_{[a,b]} \|f_n - g_n\| \\ & \leqslant & (b-a)\|f_n - g_n\|_{\infty,[a,b]}. \end{array}$$

   Cette dernière norme tend vers 0 car

$$\|f_n - g_n\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \|f_n - f\|_{\infty,[a,b]} + \|f - g_n\|_{\infty,[a,b]}.$$

   → On appelle cette limite commune l'intégrale de f sur $[a,b]$ on la note $\int_{[a,b]} f$.

Propriété 82 *(propriétés de l'intégrale)*

1. Linéarité
2. **Norme** :
$$\left\| \int_{[a,b]} f \right\| \leqslant \int_{[a,b]} \|f\|.$$
3. **Composition avec une application linéaire** : si $\varphi \in \mathscr{L}(F,G)$, alors
$$\varphi\left(\int_{[a,b]} f\right) = \int_{[a,b]} \varphi \circ f.$$
4. **Intégration par composantes** : soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ vers F. Si $f_1, \cdots, f_n$ sont les applications coordonnées de f dans la base $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de F, alors
$$\int_{[a,b]} f = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{[a,b]} f_i\right) e_i.$$
Autrement dit, il suffit d'intégrer composante par composante.
5. **Sommes de Riemann :** si f est continue par morceaux sur $[a,b]$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b-a}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\dfrac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$

Relation de Chasles et extension de l'intégrale

Propriété 83 *(Additivité de l'intégrale)*

soit $I = [a,b]$ un segment et $c \in]a,b[$. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. On a
$$\int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f = \int_{[a,b]} f.$$

Définition 50 *(Extension et relation de Chasles)*

soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans F. Si a et b sont deux réels de I, alors on définit $\int_a^b f(t)\,dt$ par
$$\begin{cases} \int_{[a,b]} f & \text{si} \quad b > a \\ 0 & \text{si} \quad a = b \\ -\int_{[b,a]} f & \text{si} \quad b < a \end{cases}$$
On a alors, pour tout $(a,b,c) \in I^3$,
$$\int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt.$$

Primitives et intégrales

Définition 51 *(Primitive)*

Soit f une application continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans F. On appelle primitive de f sur I toute application g de classe $\mathscr{C}^1$ sur I à valeurs dans F telle que, $\forall x \in I, g'(x) = f(x)$.

- → Soit f une application continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans F. On appelle primitive de f sur I toute application g de classe $\mathscr{C}^1$ sur I à valeurs dans F telle que, $\forall x \in I, g'(x) = f(x)$.
- → Soit f une application continue par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans F. On appelle primitive de f sur I toute application g **continue** sur I et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur I telle que $g'(x) = f(x)$ en tout point $x \in I$ où f est continue.
- → Si g_1 et g_2 sont deux primitives de f sur I alors $g_1 - g_2$ est constante sur I.

Théorème 19 *(Théorème fondamental)*

soit f une fonction continue sur I et $a \in I$. La fonction
$$F : x \in I \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$$
est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a. De plus, pour toute primitive h de f sur I, on a , pour tout $x \in I$,
$$\int_a^x f(t)\,dt = h(x) - h(a).$$

Propriété 84

- → soit f une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$, on a $f(b) - f(a) = \displaystyle\int_a^b f'(t)\,dt$.
- → **intégration par parties** : soit f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ à valeurs réelles ou complexes, on a
$$\int_a^b f'(t)g(t)\,dt = (f(b)g(b) - f(a)g(a)) - \int_a^b f(t)g'(t)\,dt.$$
- → **changement de variable (général)** : soit $f \in \mathscr{C}^0(I,F)$ et $\varphi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. On a
$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du.$$
- → **changement de variable (usuel)** : soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et φ une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $[\alpha,\beta]$ sur $[a,b]$, alors
$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du.$$

Remarques :
- → On peut généraliser cette formule dans F si on dispose d'un produit dans F (exemple sur les espaces de matrices). On peut également la généraliser avec $f : I \to F$ et $g : I \to \mathbb{K}$.
- → Elle est valable si les fonctions f et g sont continues et $\mathscr{C}^1$ par morceaux.

Démonstration : Soit G une primitive de f sur I. La première expression vaut
$$G(\varphi(\beta)) - G(\varphi(\alpha)).$$
La dérivée de $\theta = G \circ \varphi$ est $(f \circ \varphi).\varphi'$, et
$$G(\varphi(\beta)) - G(\varphi(\alpha)) = \theta(\beta) - \theta(\alpha) = \int_\alpha^\beta \theta'(u)\,du.$$

ÉTUDE GLOBALE DES FONCTIONS DE CLASSE $\mathscr{C}^k$

Propriété 85 *(Inégalité des accroissements finis)*

soit une fonction $f : I \to F$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur I telle qu'il existe λ tel que $\forall x \in I, \|f'(x)\| \leq \lambda$. Pour tout $(a,b) \in I^2$, on a $\|f(b) - f(a)\| \leq \lambda|b-a|$.

Démonstration : Il suffit d'utiliser le corollaire de la partie précédente avec la majoration de la norme de l'intégrale :
$$\|f(b) - f(a)\| = \left\|\int_a^b f'(t)\,dt\right\| \leq \left|\int_a^b \|f'(t)\|\,dt\right| \leq \lambda|b-a|.$$

Proposition 86 *(prolongement $\mathscr{C}^1$ et $\mathscr{C}^k$)*

- → Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ à valeurs dans F et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a,b]$. Si f' admet une limite finie l en a, alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$.
- → Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et de classe $\mathscr{C}^k$ sur $]a,b]$. Si $f', f'', \cdots, f^{(k)}$ admettent une limite finie en a, alors f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $[a,b]$.

FORMULES DE TAYLOR

Proposition 87 *(Formules de Taylor)*

- **Reste intégral** : soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[a,b]$ à valeurs dans F et $\mathscr{C}^{n+1}$ par morceaux sur $[a,b]$, alors, pour tout $x \in [a,b]$, on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underbrace{\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt}_{R_n(x)}$$

La quantité R_n est appelé « reste intégrale » ou forme intégrale du reste.

- **Inégalité de Taylor-Lagrange** : avec les mêmes hypothèses que dans le théorème précédent, si on note M_{n+1} un majorant de $\|f^{(n+1)}\|$ sur $[a,b]$, alors on a, pour tout $x \in [a,b]$,

$$\left\| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right\| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$$

- **développement limité vectoriel (Taylor-Young)** : soit $f : I \to F$ de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I. La fonction f admet un développement limité à l'ordre n en tout point de I et pour tout $x_0 \in I$, on peut écrire pour h dans un voisinage de 0 tel que $x_0 + h \in I$,

$$f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + o(h^n).$$

IV. EXERCICES

Exercice 1

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & x & 1 & \ddots & \vdots \\ \frac{x^3}{3!} & \frac{x^2}{2!} & x & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ \frac{x^n}{n!} & \dots & \dots & \frac{x^2}{2!} & x \end{vmatrix}$$

Calculer et simpliier $D_n'(x)$ et en déduire une expressions simple de $D_n(x)$.

Exercice 2

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normée de dimenion finie, et $f \in \mathscr{C}^1([a,b],E)$, telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer

$$\left\| \int_a^b f(t)\,dt \right\| \leqslant \frac{(b-a)^2}{4} \sup_{x\in[a,b]} \|f'(x)\|.$$

Exercice 3 ***(Mines MP 2018)***

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$. On suppose que f et f'' sont bornées.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. Montrer que $\|f'(x)\| \leqslant \frac{2\|f\|_\infty}{h} + \frac{h}{2}\|f''\|_\infty$.
2. Montrer que f' est bornée et que $\|f'\|_\infty^2 \leqslant 4\|f\|_\infty \|f''\|_\infty$.