20 Espaces vectoriels normés Généralisations

I. Généralisations

Cadre général : dans ce résumé, on donne les versions généralisées des théorèmes sur les suites et séries de fonctions, les intégrales à paramètre. On désigne par E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie, A une partie de E et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Série d'un evn

Proposition 69 *(Convergence absolue)*

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On dit que la série $\sum u_n$ converge lorsque la suite (S_n) converge (dans E). On note alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ la limite.
- Si la série numérique $\sum \|u_n\|$ converge alors $\sum u_n$ converge.

Exemple

Soit $E = M_n(\mathbb{R})$ muni de la norme 2 (norme d'algèbre). Soit $A \in E$. On note $u_n = \dfrac{A^n}{n!}$. On a $\|u_n\| \leqslant \dfrac{\|A\|^n}{n!}$ et la série $\sum \dfrac{\|A\|^n}{n!}$ converge. On en déduit que la série $\sum \dfrac{A^n}{n!}$ converge. On note $\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{A^n}{n!}$.

Suites de fonctions

Définition 42 *(Convergences)*

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur A à valeurs dans F et f une fonction de A vers F. On dit que

- (f_n) converge simplement vers f sur A lorsque, pour tout $x \in A$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ (dans F), ou encore

$$\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow \left\|f_n(x) - f(x)\right\|_F < \varepsilon.$$

- (f_n) converge uniformément vers f sur A lorsque, $\lim_{n\to+\infty} \left\|f_n - f\right\|_{\infty,A} = 0$, ou encore

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \forall x \in A, \left\|f_n(x) - f(x)\right\|_F < \varepsilon.$$

Théorème 13 *(Continuité, limites)*

Soit (f_n) une suite de fonctions de A vers F.

- **continuité** : si (f_n) converge uniformément vers f sur A et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur A (resp. en $a \in A$) alors f est continue sur A (resp. en $a \in A$).
- **permutation des limites** : si $a \in \overline{A}$, (f_n) converge uniformément vers f sur A et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite finie $\ell_n \in F$ en a alors la suite (ℓ_n) converge vers $\ell \in F$ et $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$.

Théorème 14 *(Intégration/dérivation)*

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et (f_n) une suite de fonctions de I vers F.

- → **dérivation** : si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, (f_n) converge simplement vers f sur I et (f_n') uniformément vers g sur I alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $f' = g$.
- → **intégration** : si (f_n) est une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers f sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$.

SÉRIES DE FONCTIONS

Définition 43 *(Convergences)*

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur A à valeurs dans F, on note $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k$. Soit S une fonction de A vers F. On dit que

- → $\sum f_n$ converge simplement sur A lorsque, pour tout $x \in A$, $\sum f_n(x)$ converge ou encore que (S_n) converge simplement sur A.
- → $\sum f_n$ converge uniformément sur A lorsque (S_n) converge uniformément sur A (vers S), c'est-à-dire

$$\lim_{n\to+\infty} \|S_n - S\|_{\infty,A} = \lim_{n\to+\infty} \|R_n\|_{\infty,A} = 0 \text{ (où } R_n = S - S_n).$$

- → $\sum f_n$ converge normalement sur A lorsque $\sum \left\|f_n\right\|_{\infty,A}$ converge (où $\left\|f_n\right\|_{\infty,A} = \sup\limits_{x\in A} \left\|f_n(x)\right\|_F$). La convergence normale entraîne la convergence uniforme.

On dispose des mêmes théorèmes que pour les suites de fonctions. Essentiellement, on utilise

Théorème 15 *(Continuité)*

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues de A vers F. Si $\sum f_n$ converge uniformément sur A, avec S la somme de la série, alors S est continue sur A.

EXEMPLE

L'application $A \mapsto \exp(A) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$ est continue sur $M_n(\mathbb{K})$: on munit $M_n(\mathbb{K})$ d'une norme d'algèbre (par exemple la norme 2)

- → pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : A \mapsto \frac{A^n}{n!}$ est continue sur $M_n(\mathbb{K})$.
- → soit $R > 0$. Si $\|A\| \leqslant R$ alors $\left\|f_n(A)\right\|_F \leqslant \frac{R^n}{n!}$ (majoration indépendante de A). La série de fonctions converge normalement sur la boule fermée $\overline{B}(0,R)$.

Ainsi la fonction est continue sur toute boule fermée centrée en 0 donc sur $M_n(\mathbb{K})$.

Théorème 16 *(Dérivation - variable réelle)*

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans F. Si $\sum f_n$ converge simplement sur I et $\sum f_n'$ uniformément alors $S = \sum\limits_{n=0}^{=\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et, pour tout $t \in I$, $S'(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n'(t)$.

EXEMPLE

Soit $(E, \|.\|)$ une algèbre normée de dimension finie et $a \in E$. La fonction $f : t \mapsto \exp(ta)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $f'(t) = a.\exp(ta) = \exp(ta).a$.

- → on note $f_n : t \mapsto t^n \dfrac{a^n}{n!}$, fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $f_n'(t) = \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!} a^n = a.f_{n-1}(t) = f_{n-1}(t).a$,
- → on a $\|f_n(t_0)\|_F \leqslant \dfrac{(|t_0|\,\|a\|)^n}{n!}$ et $\sum f_n(t_0)$ converge absolument donc converge et ainsi $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
- → soit $R > 0$, si $|t| \leqslant R$, alors $\|f_n'(t)\|_F \leqslant \dfrac{R^{n-1}}{(n-1)!}\|a\|^n$ et $\sum f_n'$ converge normalement sur $[-R, R]$

on a alors f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $f'(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} a^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} a^{n+1} = a.\exp(ta) = \exp(ta).a$ (par continuité de l'application linéaire $x \mapsto a.x$ dans E).

INTÉGRALES À PARAMÈTRE

Théorème 17 *(Continuité)*

Soit $h : A \times I \to \mathbb{K}$ avec
- → pour tout $x \in A$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue par morceaux sur I,
- → pour tout $t \in I$, $x \mapsto h(x,t)$ est continue sur A,
- → il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}$ intégrable sur I telle que, pour tout $(x,t) \in A \times I$, $|h(x,t)| \leqslant \varphi(t)$,

alors $f : x \mapsto \displaystyle\int_I h(x,t)\,dt$ est continue sur A.

le théorème de dérivation reste celui du cours (le paramètre x est dans un intervalle de $\mathbb{R}$).

II. EXERCICES

SUITES ET SÉRIES DANS UN EVN

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer et comparer $\exp(A)$, $\exp(B)$ et $\exp(A+B)$.

Exercice 2

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\det \exp(A) = \exp(\operatorname{tr} A)$.

Exercice 3

Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\exp(M)$ est un polynôme en M.

Exercice 4

Soit $f :]-1,1[\to E$ où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, continue en 0. On suppose qu'il existe $k \in]0,1[$ tel que $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(kx)}{x} = \ell$. Montrer que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$ en fonction de ℓ.

Exercice 5 ***(rayon spectral)***

Soit $E = M_n(\mathbb{C})$ et $A \in E$. On définit le rayon spectral de A comme

$$\rho(A) = \max\{|\lambda|, \lambda \in \mathrm{Sp}A\}.$$

1. L'application $A \mapsto \rho(A)$ est-elle une norme sur E ?
2. On suppose que la suite matricielle (A^k) converge vers 0. Montrer que $\rho(A) < 1$.
3. Soit $\|.\|$ une norme sur E subordonnée à la norme $\|.\|$ sur $M_{n1}(\mathbb{C})$ (même notation pour les deux normes). Montrer que, si $\lambda \in \mathrm{Sp}A$, alors $|\lambda| \leqslant \|A\|$.
4. On utilise maintenant la norme $\|.\|_\infty$ sur $M_{n1}(\mathbb{C})$ (on utilisera l'exercice 7).
   (a) Soit $A \in E$, $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et T triangulaire telle que $A = PTP^{-1}$. On note $C_1, \dots C_n$ les colonnes de P. On définit P_α la matrice dont les colonnes sont $C_1, \alpha C_2, \alpha^2 C_3, \dots, \alpha^{n-1} C_n$. Écrire la matrice $T_\alpha = P_\alpha^{-1} A P_\alpha$.
   (b) Justifier que l'application $|||.|||_\alpha : M \mapsto |||P_\alpha^{-1} M P_\alpha|||$ définit une norme d'algèbre sur E.
   (c) En déduire que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   i/ $\lim\limits_{k \to +\infty} A^k = 0$,
   ii/ $\rho(A) < 1$,
   iii/ $\sum A^k$ converge.

Exercice 6

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_p(\mathbb{R})$. On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(A) = \left(I_p + \frac{A}{n}\right)^n$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une suite de réels $(a_k(n))_{k \in \mathbb{N}}$ telle que

$$u_n(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(n) A^k.$$

2. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n(A) = \exp(A)$.

Exercice 7

Justifier que la fonction f définie par $f(x, y) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} e^{-n(x^2+y^2)}$ est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ (on dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ lorsque f admet des fonctions dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en tout point de $\mathbb{R}^2$ et que ces deux fonctions sont continues sur $\mathbb{R}^2$.