19 Espaces vectoriels normés Applications linéaires, connexité

I. Applications linéaires continues

Applications linéaires

Théorème 12 *(Continuité)*

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés (dimension quelconque) et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On a équivalence entre

- → f est continue sur E,
- → f est continue en 0,
- → il existe $K \geqslant 0$ tel que, pour tout $x \in E$, $\left\| f(x) \right\|_F \leqslant K \left\| x \right\|_E$.
- → f est lipschitzienne.
- → f est bornée sur la boule fermée unité

On note $\mathscr{L}_c(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F.

Définition 40 *(Norme)*

Soit $f \in \mathscr{L}_c(E,F)$. On note $|||f||| = \sup\left\{\left\| f(x) \right\|_F, x \in E, \|x\| \leqslant 1\right\}$

- → cela définit une norme sur $\mathscr{L}_c(E,F)$ et une norme d'algèbre unitaire sur $\mathscr{L}_c(E)$.
- → pour tout $x \in E$, $\left\| f(x) \right\|_F \leqslant |||f|||.\|x\|_E$.
- → On a également

$$|||f||| = \sup\left\{\frac{\left\| f(x) \right\|_F}{\|x\|_E}, x \in E, x \neq 0\right\} = \sup\left\{\left\| f(x) \right\|_F, x \in E, \|x\| = 1\right\} = \min\left\{K \geqslant 0, \forall x \in E, \left\| f(x) \right\|_F \leqslant K \|x\|_E\right\}.$$

Applications bi et multilinéaires

Proposition 67

- → Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si B est une application bilinéaire de $E \times F$ vers G alors B est continue (avec une norme usuelle sur l'espace produit) si et seulement il existe $K \geqslant 0$ tel que, pour tout $x \in E, y \in F$, $\left\| B(x,y) \right\| \leqslant K \|x\| \left\| y \right\|$. On généralise avec les applications multilinéaires.
- → Si f est une application bilinéaire ou multilinéaire sur un produit de deux ou plusieurs espaces vectoriels de dimension finie alors f est continue.

II. Connexité par arcs

Définition 41 *(chemins continus, connexité par arcs)*

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie E.

- → Soient $a, b \in A$. On appelle chemin de a vers b dans A, tout application continue $f : [0,1] \to A$ continue telle que $f(0) = a$ et $f(1) = b$.
- → la relation $a\mathscr{R}b$ lorsqu'il existe un chemin continue de a vers b dans A définit une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence sont appelées *composantes connexes par arcs de A*.
- → on dit que $A \subset E$ est connexe par arcs, lorsque, pour tout $a, b \in A$, il existe $f : [0,1] \to A$ continue telle que $f(0) = a$ et $f(1) = b$ (c'est-à-dire que A n'a qu'une composante connexe par arc).

Propriété 68 *(connexes par arcs)*

- → les parties convexes sont connexes par arcs, les parties étoilées également,
- → l'image d'un connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs,
- → dans $\mathbb{R}$, les connexes par arcs sont les intervalles

III. EXERCICES

CONNEXITÉ PAR ARCS

Exercice 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et A et B deux parties non vides connexes par arcs de E.

1. Montrer que $A \times B$ est connexe par arcs.
2. Montrer que $A + B = \{a + b\,;\ a \in A \text{ et } b \in B\}$ est connexe par arcs.

Exercice 2

Soit $E = M_n(\mathbb{R})$ et Δ_n l'ensemble des matrices diagonalisables de E. Montrer que Δ_n est connexe par arcs.

Exercice 3

1. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs dans $M_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathbb{C}^*$ est connexe par arcs, puis montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs (on pourra trigonaliser la matrice).

Exercice 4 ***(Mines MP 2019)***

Soient C une partie convexe d'un espace normé réel E, D une partie de E telle que $C \subset D \subset \overline{C}$. Montrer que D est connexe par arcs.

CONTINUITÉ DES APPLICATIONS LINÉAIRES

Exercice 5 ***(CCP 36)***

Soit E, F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$.

1. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Démontrez l'équivalence
   P1) f est continue sur E,
   P2) f est continue en 0,
   P3) il existe $k > 0$, pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| \leqslant k\|x\|$.
2. Soit $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\|\|_\infty$. On considère φ définie par $\varphi(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$. Démontrez que φ est linéaire et continue.

Exercice 6

On munit $M_p(\mathbb{C})$ d'une norme. Soit $X \in \mathbb{C}^p$ et $P \in GL_p(\mathbb{C})$.

→ Montrer que $\Phi : M \mapsto MX$ et $\Psi ; M \mapsto P^{-1}MP$ sont continues sur $M_n(\mathbb{C})$.
→ Montrer que $f : (M,N) \mapsto MN$ est continue.
→ Soit $A \in M_p(\mathbb{C})$ telle que la suite (A^n) est bornée. Montrer que les valeurs propres de A sont de module inférieur ou égal à 1.
→ Soit $B \in M_p(\mathbb{C})$ telle que la suite (B^n) converge vers C. Montrer que $C^2 = C$. Que peut-on dire des valeurs propres de B ?

Exercice 7

Soit $E = \{f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}), f(0) = 0\}$ muni de la norme $\|.\|_\infty$. Soit φ l'application

$$\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} f\left(\frac{1}{n}\right) \end{array}\right.$$

Montrer que φ est bien définie, qu'elle est linéaire. Montrer qu'elle est continue et calculer sa norme.

Exercice 8

Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme 1 ; $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,dt$. Montrer que l'application $f \mapsto f(\frac{1}{2})$ est linéaire mais n'est pas continue sur E.

Exercice 9

Soit $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_1$. Soit φ l'application

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_0^{1/2} f(t)\,dt - \int_{1/2}^{1} f(t)\,dt \end{array} \right.$$

Montrer que φ est bien définie, qu'elle est linéaire. Montrer ensuite qu'elle est continue et calculer sa norme. Mêmes questions avec la norme $\|.\|_\infty$.

Exercice 10

Pour $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$, on considère la norme subordonnée

$$|||A||| = \sup \left\{ \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}, X \in M_{n1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\} \right\}.$$

où $\|X\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$. Montrer que

$$|||A||| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left[\sum_{j=1}^{n} \left| a_{i,j} \right| \right],$$

c'est-à-dire le maximum des normes $\| \ \|_1$ des lignes de A.

Exercice 11 ***(Mines MP 2016)***

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie, K une partie compacte d'intérieur non vide de E. Montrer que $\mathscr{A} = \left\{ u \in \mathscr{L}(E), u(K) \subset K \right\}$ est une partie compacte de $\mathscr{L}(E)$.

Exercice 12 ***(Mines MP 2011)***

Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et $\Phi : E \to E$ qui à f associe la fonction $\Phi(f)$ où $\Phi(f) : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$. Étudier la continuité de Φ lorsque E est muni de $\|.\|_\infty$ puis de $\|.\|_1$.

Exercice 13 ***(Centrale MP 2021)***

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \{0, \ldots, n\}$. On note R_p l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{C})$ de rang p.

1. Soient $M, N \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que M et N sont de même rang si et seulement s'il existe $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que $M = PNQ$.
2. Soit F une partie finie de $\mathbb{C}$. Montrer que $\mathbb{C} \setminus F$ est connexe par arcs.
3. Montrer que R_p est connexe par arcs.
4. Déterminer l'intérieur de R_p.
5. Déterminer l'adhérence de R_p.

Exercice 14 ***(Centrale MP 2015)***

Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note $E_P = \{M \in M_n(\mathbb{R}), P(M) = 0\}$. Le but de l'exercice est d'étudier les points isolés de E_P, c'est-à-dire les $M \in E_P$ pour les quels il existe un voisinage V de M tel que $E_P \cap V = \{M\}$.

1. Déterminer E_P et ses points isolés lorsque $n = 1$.
2. Montrer qu'il existe un voisinage V_0 de 0 tel que, pour tout $H \in V_0$, $I_n + H \in GL_n(\mathbb{R})$.
3. Soit M un point isolé de E_P. Montrer qu'il existe un voisinage V_1 de 0 tel que, pour tout $H \in V_1$, $(I_n + H)^{-1} M (I_n + H) = M$. Montrer que M commute avec tous les éléments de $M_n(\mathbb{R})$. Conclure.
4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Trouver une suite (M_k) d'éléments de $M_n(\mathbb{R})$ distincts deux à deux telle que $\lim M_k = \lambda I_n$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(M_k - \lambda I_n)^2 = 0$.
5. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que λI_n est un point isolé de (E_P) si et seulement si λ est racine simple de P.