18 ESPACES VECTORIELS NORMÉS - TOPOLOGIE, CONTINUITIÉ

I. TOPOLOGIE DES E.V.N.

OUVERTS

Définition 32 *(ouvert, voisinage)*

- → une partie O de E est ouverte lorsque, pour tout $x \in O$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset O$.
- → une partie A de E est un voisinage de x lorsqu'il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$ (A contient une boule ouverte centrée en x).

Propriété 57 *(des ouverts)*

- → E, $\emptyset$, les boules ouvertes sont ouverts. Les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ sont ouverts.
- → une union quelconque d'ouverts, une intersection finie d'ouverts sont des ouverts.

Définition 33 *(intérieur)*

- → x est intérieur à A lorsqu'il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$.
- → l'intérieur de A, noté $\mathring{A}$, est l'ensemble des points intérieurs à A - c'est le plus grand ouvert contenu dans A, à savoir la réunion de tous les ouverts de E contenus dans A :
$$\mathring{A} = \bigcup_{O \text{ ouvert} \subset A} O.$$
- → A est ouvert si et seulement si $A = \mathring{A}$.

FERMÉS

Définition 34 *(fermé)*

une partie F de E est fermée lorsque $E \backslash F$ est ouvert.

Propriété 58 *(des fermés)*

- → E, $\emptyset$, les boules fermées sont fermés.
- → une union finie de fermés, une intersection quelconque de fermés sont des fermés.

Définition 35 *(adhérence)*

- → On dit que x est adhérent à A lorsque, pour tout $r > 0$, $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$.
- → L'adhérence de A, notée $\bar{A}$ est l'ensemble des points adhérents à A. C'est le plus petit fermé qui contient A, à savoir
$$\bar{A} = \bigcap_{A \subset F \text{ fermé}} F.$$
- → A est fermé si et seulement si $A = \bar{A}$

Propriété 59 *(caractérisations séquentielles et autres)*

- → $x \in \bar{A}$ si et seulement si il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x.
- → F est fermé si et seulement si pour toute suite (x_n) de F qui converge vers $x \in E$, on a $x \in F$.
- → une partie A est dense dans E lorsque $\bar{A} = E$ (ou dans X lorsque $\overline{A} = X$).
- → on appelle frontière de A le fermé $\mathrm{Fr} A = \bar{A} \backslash \mathring{A}$.

Remarque : l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite est un fermé, plus précisément $\bigcap_{n=0}^{+\infty} \overline{\{x_k, k \geqslant n\}}$.

Exercice 1 ***(CCP - 34)***

Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E

1. Démontrez que $x \in \bar{A} \Leftrightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.
2. Démontrez que si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\bar{A}$ aussi.
3. Démontrez que si A est convexe, alors $\bar{A}$ aussi.

Exercice 2 ***(CCP - 44)***

Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties non vides de E.

1. (a) Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.
   (b) Montrer que $A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.
2. Montrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
3. (a) Montrer que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
   (b) Montrer à l'aide d'un exemple que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée (on pourra prendre $E = \mathbb{R}$).

Exercice 3 ***(CCP - 37)***

Soit $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$. On pose pour $f \in E$, $N_\infty(f) = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \displaystyle\int_0^1 |f|$.

1. (a) Démontrez succinctement que N_1 et N_∞ sont deux normes sur E.
   (b) Démontrez qu'il existe $k > 0$ tel que $N_1 \leqslant k.N_\infty$.
   (c) Démontrez que tout ouvert pour N_1 est un ouvert pour N_∞.
2. Démontrez que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie convexe de E.

1. Montrer que l'adhérence de A est convexe.
2. Montrer que l'intérieur de A est convexe.

Exercice 5 ***(Topologie et sous-espaces vectoriels)***

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Soit F un sous-espace vectoriel de E.

1. On suppose qu'il existe $r > 0$ tel que $B(0,r) \subset F$. Montrer que $E = F$.
2. Montrer que $\bar{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.
3. On suppose que F est un hyperplan de E. Montrer l'alternative : F est fermé ou F est dense dans E. Trouver des exemples.
4. On suppose que F est de dimension finie. Montrer que F est fermé.

TOPOLOGIE RELATIVE

Définition 36 *(topologie relative)*

soit A une partie de E, un partie $B \subset A$ est

→ un ouvert relatif de A lorsqu'il existe O ouvert de E tel que $B = A \cap O$,
→ un fermé relatif de A lorsqu'il existe F fermé de E tel que $B = A \cap F$,
→ un voisinage de a relatif à A lorsqu'il existe $\mathscr{V}$ voisinage de a dans E tel que $B = A \cap \mathscr{V}$,

COMPACTS

Définition 37 *(compact)*

soit K une partie de E. On dit que K est compact lorsque toute suite d'éléments de K admet une valeur d'adhérence dans K (i.e. admet une suite extraite convergente dans K).

Théorème 11 *(Bolzano-Weierstrass)*

soit (u_n) une suite bornée de réels, alors on peut en extraire une suite convergente. Ce résultat se généralise pour les suites complexes et les suites dans un evn de dimension finie.

Propriété 60 *(propriétés topologiques)*

- → si K est une partie compacte de E, alors K est fermé et borné.
- → si K' est une partie d'un compact K, alors K' est compact si et seulement si K' est fermé.
- → si E est de dimension finie, alors les compacts sont exactement les fermés bornés.
- → Un produit fini de compacts est encore compact (dans l'evn produit usuel).
- → **important** : Si (u_n) est une suite d'un compact qui n'admet qu'une seule valeur d'adhérence ℓ alors cette suite converge vers ℓ.

II. ÉTUDE LOCALE D'UNE APPLICATION

DÉFINITIONS

Dans cette partie, E et F sont deux evn et $A \subset E$ non vide.

Définition 38

- → **Limite** : soit $f : A \to F$ et a adhérent à A. On dit que f admet ℓ pour limite en a lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A, \|x - a\|_E < \alpha \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F < \varepsilon.$$

  Cette limite est alors unique. Elle est notée $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.
- → **Continuité** : soit $f : A \to F$ et $a \in A$. On dit que f est continue en a lorsque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. On dit que f est continue sur A lorsqu'elle est continue en tout point de A.

CARACTÉRISATIONS DE LA LIMITE/CONTINUITÉ

Proposition 61 *(Caractérisations)*

- → **par les suites** : on a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ si et seulement si pour tout suite (u_n) d'éléments de A qui converge vers a, alors $(f(u_n))$ converge vers ℓ.
- → **par les voisinages** : on a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ si et seulement si pour tout voisinage $\mathscr{V}$ de ℓ, il existe $\mathscr{U}$ un voisinage de a tel que $f(\mathscr{U} \cap A) \subset \mathscr{V}$.

OPÉRATIONS

Proposition 62 *(Opérations)*

- → **limites** : soit $f, g : A \to F$ qui admettent une limite, respectivement ℓ et ℓ' en $a \in \bar{A}$.
  - pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + \lambda g(x)) = \ell + \lambda \ell'$,
  - si F est une algèbre normée, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = \ell.\ell'$,
- → **composition** : soit $f : A \to F$ et $g : B \to G$ avec $f(A) \subset B$. Soit $a \in \bar{A}$. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{y \to b} g(y) = \ell$, alors $\lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = \ell$.
- → **continuité** : on a des résultats semblables pour la continuité en a, et la continuité sur A.

CONTINUITÉ UNIFORME

Définition 39 *(continuité uniforme)*

soit $f : A \to F$. On dit que f est uniformément continue sur A lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, y \in A, \|x - y\| < \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

La continuité uniforme entraine la continuité.

LIEN AVEC LA TOPOLOGIE

Proposition 63 *(images réciproques)*

soit $f : A \to F$, alors on a l'équivalence entre
- → f est continue sur A,
- → pour tout ouvert O de F, $f^{-1}(O)$ est un ouvert relatif de A.
- → pour tout fermé F' de F, $f^{-1}(F')$ est un fermé relatif de A.

Exercice 6

Soit $E = M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que le sous-ensemble des matrices symétriques (puis antisymétriques) de E est une partie fermée de E.
2. Soit B une matrice antisymétrique. On suppose que la suite (B^n) converge vers une matrice C. Que peut-on dire de la matrice C?

Exercice 7

On note F l'ensemble des triplets $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admette deux solutions réelles distinctes. Montrer que F est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

CONTINUITÉ ET COMPACTS

Proposition 64 *(lien avec la compacité)*

- → **image directe** : si f est continue sur A, si K est un compact de E inclus dans A, alors $f(K)$ est un compact de F.
- → **continuité uniforme** : si $f : K \to E$ est continue et K compact, alors f est uniformément continue sur K.

III. QUELQUES SYNTHÈSES

Propriété 65

normes équivalentes si N_1 et N_2 sont équivalentes, alors
- → elles conservent la nature des suites et la valeur des limites (suites), les valeurs d'adhérence
- → elles conservent les propriétés de limites et continuité (fonctions), le fait d'être lipschitzien,
- → elles ont les mêmes ouverts, fermés, bornés (mais les boules sont différentes), les adhérences et intérieurs sont conservés.

Propriété 66 *(Dimension finie)*

Soit E un espace vectoriel normée de dimension finie
- → toutes les normes sur E sont équivalentes,
- → les compacts de E sont les fermés bornés,
- → les sous-espaces vectoriels de E sont fermés,
- → une suite de E converge si et seulement si elle converge coordonnées par coordonnées (dans une base),
- → une fonction de A vers E (arrivée de dimension finie) admet une limite en a (resp. est continue en a) si et seulement si ses applications composantes admettent une limite en a (resp. est continue en a),

IV. EXERCICES

SUITES D'UN EVN

Exercice 8

Soit $\|.\|$ une norme sur $E = M_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $P \in GL_n(\mathbb{R})$, $\|P^{-1}AP\| = \|A\|$ (la norme est constante sur les classes de similitude).

1. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans E.
2. Montrer que, pour tout $A, B \in E$, alors $\|AB\| = \|BA\|$.
3. En déduire une contradiction.

Exercice 9

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, et F une sous-espace vectoriel de E de dimension finie.

1. Montrer que pour tout $x \in E$, il existe $y \in F$ tel que $\|x - y\| = d(x, F)$ (on pourra construire une suite (y_n) de F telle que $\|x - y_n\|$ converge vers la distance).
2. Montrer que si $F \neq E$, alors il existe $u \in E$ tel que $d(u, F) = \|u\| = 1$.
3. En déduire que si E est de dimension infinie, alors on peut construire une suite de vecteurs unitaires de E, distants deux à deux d'au moins 1.
4. Montrer que si la boule unité de E est compacte, alors E est de dimension finie.

Exercice 10

Soit (u_n) une suite bornée de réels. On suppose que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n + \dfrac{1}{2} u_{2n} = 1$. Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

TOPOLOGIE

Exercice 11 ***(Somme de parties)***

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, A et B deux parties de E. On note $A + B = \{a + b, a \in A \text{ et } b \in B\}$.

1. Montrer que si A est ouvert, alors $A + B$ est ouvert.
2. Montrer que si A et B sont compacts, alors $A + B$ est compact.
3. Montrer que si A est compact et B fermé, alors $A + B$ est fermé.
4. Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2, xy = 1\}$ et $B = \{0\} \times \mathbb{R}^-$ deux parties de $\mathbb{R}^2$. Montrer que A et B sont fermées. Que peut-on dire de $A + B$?

Exercice 12 ***(Diamètre)***

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.

1. Soit A une partie non vide bornée de E. Justifier l'existence de $\sup\{\|a - b\|, a, b \in A\}$. On note $\delta(A)$ ce réel, et on l'appelle diamètre de A.
2. Montrer que $\delta(A) = \delta(\bar{A})$.
3. On suppose que A est compacte. Montrer qu'il existe $a, b \in A$ tels que $\|a - b\| = \delta(A)$.
4. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de compacts de E, et $A = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$. A-t-on $\delta(A) = \lim\limits_{n\to+\infty} \delta(A_n)$?

Exercice 13 ***(Frontière)***

Soit E un espace vectoriel normé. On note $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$ la frontière de A.

1. Comparer $\mathrm{Fr}(A)$ et $\mathrm{Fr}(E \setminus A)$.
2. Montrer que $\mathrm{Fr}(\overline{A}) \subset \mathrm{Fr}(A)$ et $\mathrm{Fr}(\mathring{A}) \subset \mathrm{Fr}(A)$. Ces inclusions sont-elles des égalités ?
3. Montrer que $\mathrm{Fr}(A \cup B) \subset \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$. Est-ce une égalité ?

Exercice 14 ***(Mines MP)***

Soit $E = \mathscr{C}^0(]0, 1[, \mathbb{R})$ de carré intégrable, muni de la norme $\|f\|_2 = \left(\int_0^1 f^2\right)^{1/2}$. Soit $F = \{f \in E, \int_0^1 |f| < 1\}$. L'ensemble est-il ouvert ? convexe ? borné ?

Exercice 15 ***(Mines MP)***

Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien et $\Omega = \left\{(x, y) \in E^2, (x, y) \text{ libre}\right\}$. Montrer que Ω est un ouvert de E^2

Exercice 16

Soit E un espace vectoriel normé et K un compact de E. Soit $f : K \to K$ telle que

$$x \neq y \quad \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

1. Montrer que f possède au plus un point fixe.
2. A l'aide la fonction
$$D : \begin{cases} K & \to & \mathbb{R}^+ \\ z & \mapsto & \|f(z) - z\| \end{cases}$$
montrer que f admet un point fixe a.
3. Soit (u_n) définie par $u_0 \in K$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que cette suite converge vers a (*Indic :* étudier $\|u_n - a\|$).

Exercice 17

(Matrices de projections) Soit $E = M_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{P} = \{M \in E, M^2 = M\}$. L'ensemble $\mathscr{P}$ est-il ouvert? borné? fermé? compact? Déterminer l'intérieur et l'adhérence de $\mathscr{P}$.

Exercice 18 *(Mines MP)*

Soit $(E, \|\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et $A \subset E$.

1. Montrer que $x \mapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne.
2. Soit $x \in E$. Montrer que $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \bar{A}$.
3. Soit K un compact non vide de E et $x_0 \in E$. Montrer qu'il existe $a \in K$ tel que $\|x_0 - a\| = d(x_0, K)$.
4. Soit F un fermé non vide de E, $x_0 \notin F$ et $a \in F$. Montrer que la distance $d\Big(x_0, F \cap \overline{B}(x_0, \|x_0 - a\|)\Big)$ est atteinte et en déduire qu'il existe $b \in F$ tel que $d(x_0, F) = \|x_0 - b\|$.

Exercice 19 *(Mines MP)*

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$.

1. Que dire de u si sa matrice dans toute base est diagonale?
2. Que dire de u s'il a même matrice dans toute base?

Exercice 20 *(Mines MP)*

Soit $E = M_n(\mathbb{R})$ est muni d'une norme, et une matrice A dont la suite des puissances $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée. On pose alors $B_p = \dfrac{I_n + A + \cdots + A^{p-1}}{p}$ pour $p \geqslant 1$.

1. Montrer que (B_p) admet une valeur d'adhérence. On en choisit une, notée B. Montrer que $BA = AB = B$ puis que $B^2 = B$.
2. Montrer que $\ker B = \operatorname{Im}(A - I_n)$ et que $\operatorname{Im} B = \ker(A - I_n)$.
3. Déduire de tout cela que $\lim\limits_{p\to+\infty} B_p = B$.

Exercice 21

Soit E l'ensemble des suites bornées muni de la norme infini. Déterminer l'adhérence de l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang.

Exercice 22 ✫

1. Soit K un compact d'un espace vectoriel normé E et $f : K \to K$ une isométrie (pour tout $x, y \in E$, $\big\|f(x) - f(y)\big\| = \big\|x - y\big\|$. Montrer que f est bijective.
2. Soit K compact de E est $f : K \to K$ continue telle que $\|f(x) - f(y\| \geqslant \|x - y\|$. Montrer que f est une isométrie bijective. On étudiera les suites $x_n = f^n(x_0)$ et $y_n = f^n(y_0)$ pour x_0 et y_0 dans K.

Exercice 23 *(Mines MP)* ✫

1. Soit (K_n) une suite décroissante de fermés de $[a, b]$ d'intersection vide. Montrer qu'il existe n_0 tel que $K_{n_0} = \emptyset$.
2. Soit (f_n) une suite croissante de fonctions continues sur $[a, b]$, convergeant simplement vers une fonction f continue sur $[a, b]$. Montrer que la convergence est uniforme (indication : poser $g_n = f - f_n$ et utiliser, pour $\varepsilon > 0$ les ensembles $K_N = \{x \in [a, b], g_N(x) \geqslant \varepsilon\}$).

Exercice 24 ***(adhérence des matrices diagonalisables)***

1. Soit P un polynôme réel non nul unitaire de degré n. Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geqslant |\text{Im } z|^n$.
2. Montrer que $M \mapsto \chi_M$ est continue sur $M_n(\mathbb{K})$.
3. Soit T_n l'ensemble des matrices trigonalisables de $M_n(\mathbb{R})$, D_n les diagonalisables, Δ_n diagonalisables à valeurs propres distinctes. Montrer que
$$\overline{D_n} = \overline{\Delta_n} = T_n.$$

Exercice 25 ***(Centrale MP)***

Soit G un sous-groupe de $\left(\mathbb{C}^*, \times\right)$ tel que, pour tout $g \in G$, il existe un voisinage V de g dans $\mathbb{C}^*$ tel que $V \cap G = \{g\}$.

1. Montrer que, pour tout compact K de $\mathbb{C}^*$, $G \cap K$ est fini.
2. Montrer que $G \cap \mathbb{U}$ est cyclique.
3. On suppose que G n'est pas contenu dans $\mathbb{U}$. Soit $\Lambda = \{z \in G, |z| > 1\}$. Montrer que Λ admet un plus petit élément (pour la norme). En déduire G.

CONTINUITÉ, CONTINUITÉ UNIFORME

Exercice 26 ***(Mines MP)***

1. Montrer que toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est limite d'une suite de matrices inversibles.
2. Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\text{Com}(AB) = \text{Com}(A)\text{Com}(B)$.
3. Donner le rang de $\text{Com}(A)$ en fonction de celui de A.

Exercice 27

1. Soit (u_n) une suite convergente d'un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$. On note ℓ la limite de cette suite. Montrer que $F = \{u_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ est fermé.
2. Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que l'image réciproque de tout compact est compacte. Montrer que f est une application fermée, c'est-à-dire que l'image directe de tout fermé est un fermé.

Exercice 28

Soit f une application continue sur $\mathbb{R}$. Montrer l'équivalence entre

1. l'image réciproque de tout compact est compact.
2. $\lim_{x \to +\infty} |f(x)| = \lim_{x \to -\infty} |f(x)| = +\infty$.

Exercice 29

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{x}$. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$, mais qu'elle n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 30

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $G_f = \{(x, f(x)), x \in \mathbb{R}\}$ le graphe de f.

1. Montrer que si f est continue, alors G_f est fermé.
2. Si f est bornée et si G_f est fermé dans $\mathbb{R}^2$, montrer que f est continue.
3. Le résultat précédent subsiste-t-il si f n'est pas bornée?

Exercice 31

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une application uniformément continue. On suppose que, pour tout $x > 0$, $\lim_{n \to +\infty} f(nx) = 0$. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Exercice 32

Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie et $f \in \mathscr{C}^0(E, \mathbb{R})$ telle que,
$$\exists c > 0, \exists R > 0, \forall x \in E, \|x\| > R \Rightarrow f(x) > c\|x\|.$$
Montrer que f admet un minimum.

Exercice 33

Soit f une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs réelles ou complexes. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)\sin(xt)\,dt$. Montrer que F est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 34 ***(Centrale MP)***

Soit E un espace vectoriel muni d'une norme $\|\|$ et de sa distance associée. On dit qu'une suite (x_n) de E vérifie $(\mathscr{C})$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \forall p \in \mathbb{N}, \left\|x_{n+p} - x_n\right\| \leqslant \varepsilon.$$

1. Soient R et r deux réels strictement positifs ainsi que a et b deux points de E. Montrer que $B_f(a,r) \subset B_f(b,R)$ si et seulement si $d(a,b) \leqslant R - r$.
2. On suppose $E = \mathbb{R}$. Montrer que toute suite vérifiant $(\mathscr{C})$ est convergente. Réciproque ?
3. On suppose que toute suite de E vérifiant $(\mathscr{C})$ est convergente. Montrer que l'intersection de toute suite décroissante de boules fermées est une boule fermée.