17 SÉRIES DE FONCTIONS

I. CONVERGENCES

Définition 31 *(Notations et convergences)*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $A \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k$ (somme partielle de la série de fonctions)

- → la série de fonctions $\sum f_n$ **converge simplement** sur A lorsque la suite de fonctions (S_n) convergence simplement sur A. Cela revient à dire que, pour tout $x \in A$, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge. On note alors, pour tout $x \in A$, $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ et $R_n = S - S_n$ ce qui donne, pour tout $x \in A$, $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$.
- → la série de fonctions $\sum f_n$ **converge uniformément** sur A lorsque la suite de fonctions (S_n) convergence uniformément sur A. Cela revient à dire qu'il existe n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $S - S_n = R_n$ est bornée et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|S - S_n\|_{\infty,A} = \lim\limits_{n\to+\infty} \|R_n\|_{\infty,A} = 0$.
- → la série de fonctions $\sum f_n$ **converge normalement** sur A lorsqu'il existe n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, pour tout $x \in A$,$|f_n(x)| \leqslant a_n$ avec $\sum a_n$ convergente. Cela revient à dire que $\sum \|f_n\|_{\infty,A}$ converge.
- → la série de fonctions $\sum f_n$ **converge absolument** sur A lorsque, pour tout $x \in A$, la série numérique $\sum |f_n(x)|$ converge.

Remarques :

- → la convergence normale entraîne toutes les autres convergences ; on n'a pas de lien entre la convergence uniforme et la convergence absolue
- → si $\sum f_n$ converge simplement, on peut écrire $f_n = R_{n-1} - R_n$. Si $\sum f_n$ converge uniformément sur I alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n\|_{\infty,I} = 0$.

II. PROPRIÉTÉS

CONTINUITÉ, DÉRIVABILITÉ...

Propriété 55 *(Continuité, limites)*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A vers $\mathbb{K}$.

- → **continuité** : si $\sum f_n$ converge uniformément sur A et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur A (resp. en $a \in A$) alors $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur A (resp. en $a \in A$).
- → **permutation des limites** : si $a \in \overline{A}$, $\sum f_n$ converge uniformément sur A - on note $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ - et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite finie $\ell_n \in \mathbb{K}$ en a alors la série $\sum \ell_n$ converge et $\lim\limits_{x\to a} S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ell_n$.

Propriété 56 *(Intégration/dérivation)*

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I vers $\mathbb{K}$.

- → **dérivation** : si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, si $\sum f_n$ converge simplement sur I, avec $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$, et si $\sum f'_n$ converge uniformément sur I alors S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et, pour tout $x \in I$, $S'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f'_n(x)$.
- → **intégration** : si $\sum f_n$ est une série de fonctions continues qui converge uniformément sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$, avec $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$, alors $\int_a^b S(t)\,dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt$.

INTÉGRATION TERME À TERME

Théorème 10 *(Intégration terme à terme)*

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si

- → pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux et intégrable sur I,
- → $\sum f_n$ converge simplement sur I, avec $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$,
- → la fonction somme S est continue par morceaux sur I,
- → la série $\sum \int_I |f_n(t)|\, dt$ converge,

alors

- → S est intégrable sur I,
- → on a $\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n(t)\, dt\right)$
- → et également $\int_I |S(t)|\, dt \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I |f_n(t)|\, dt\right)$

MÉTHODE - PERMUTATION SOMME-INTÉGRALE

Pour obtenir une permutation $\sum - \int$:

- → on utilise le théorème d'intégration terme à terme (hypothèse forte : convergence de $\sum \|f_n\|_1$),
- → on utilise le théorème de convergence dominée sur la suite des sommes partielles (hypothèse forte : domination indépendante de n des sommes partielles $|S_n(t)|$),
- → moins fréquent : on écrit $S = S_n + R_n$, puis $\int_I S(t)\, dt = \int_I S_n(t)\, dt + \int_I R_n(t)\, dt$ et on montre que $\lim_{n\to+\infty} \int_I R_n(t)\, dt = 0$

III. EXERCICES

Exercice 1

Étudier les convergences simple, uniforme, normale des séries de fonctions suivantes :

a) $\sum x^n \ln^2 x$. b) $\sum x^n \ln x$. c) $\sum \dfrac{nx^2}{1+n^3x}$ d) $\sum \dfrac{nx}{n^4+x^2}$

Exercice 2

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto nxe^{-nx^2}$.

1. Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}^*$. On note S sa somme. Montrer que S est impaire.
2. Soit $a > 0$. Calculer pour $x > 0$, $\int_a^x S(t)\, dt$ et en déduire S.

Exercice 3

Démontrer les relations suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}}\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+bn)^2}$ où $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(-\ln x)^p}{1-x}\, dx = p! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{p+1}}$ $(p \in \mathbb{N}^*)$.

Exercice 4

On pose $f : t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2t}{t^2+n^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f. Étudier la parité de f.
2. Étudier la continuité de f.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. La convergence de la série est-elle uniforme sur $\mathbb{R}^+$?
5. La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 5

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit f_n sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{1}{n}\arctan(\frac{x}{n})$. On veut étudier la série de fonctions $\sum f_n$.

1. Montrer que la série converge simplement sur $\mathbb{R}$ et que sa somme S est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et étudier les variations de S.
3. Déterminer la limite de $S(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 6

1. Soit $r \in]-1,1[$. On pose pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n \cos(nx)}{n}$. Vérifier que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose pour $r \in]-1,1[$, $g(r) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n \cos(nx)}{n}$. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$, déterminer une expression simple $g(r)$ pour $r \in]-1,1[$.
3. En déduire $\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1-2r\cos x + r^2)\,dx$.

Exercice 7

1. On définit pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$, $I_{n,p} = \int_0^1 x^n (\ln x)^p$. Justifier l'existence de $I_{n,p}$ et déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, une relation entre $I_{n,p}$ et $I_{n,p-1}$. En déduire la valeur de $\int_0^1 x^n (\ln x)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Prouver l'égalité $\int_0^1 x^x\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.

Exercice 8

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f définie par
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}.$$
2. Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
3. Déterminer une équation différentielle simple dont f est solution et en déduire que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.

Exercice 9

1. Étudier la convergence simple de la série $\sum u_n$ où $u_n(x) = \exp(-x\sqrt{n})$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On note S la somme de cette série de fonctions.
2. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} S(x) = 0$.
4. Montrer que S est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. Montrer que $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}$.
6. Montrer que $S(x) \underset{0}{\sim} \frac{2}{x^2}$.

Exercice 10 ***(Mines MP 2021)***

On définit une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ en posant $f_0=1$ et, si $n\in\mathbb{N}$ et $x\in[0,1]$, $f_{n+1}(x)=1+\int_0^x f_n\left(t-t^2\right)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que les f_n sont polynomiales.
2. Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f et que $\forall x\in[0,1], f(x)\leqslant e^x$.
3. Montrer que $\sum(f_{n+1}-f_n)$ converge normalement sur $[0,1/2]$, puis que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur cet intervalle.
4. Si $n\in\mathbb{N}$ et $x\in[0,1]$, que dire de $f_n(x)+f_n(1-x)$? Qu'en déduit-on sur f ?
5. Montrer que f est de classe C^∞ sur $[0,1]$.

Exercice 11

On définit pour $n\in\mathbb{N}$, $I_n=\int_0^1\frac{dx}{1+x^n}$.

1. Montrer l'existence de I_n pour tout $n\in\mathbb{N}$ et donner la limite ℓ de I_n.
2. Donner un équivalent de $I_n-\ell$ en l'infini.
3. Prouver l'existence de $J=\int_0^1\frac{\ln(1+t)}{t}\,dt$ et exprimer sa somme sous forme d'une série.
4. En déduire un développement asymptotique de I_n à trois termes.

Exercice 12

On appelle S la fonction définie par $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x}}$.

1. Préciser sur quel intervalle cette fonction est définie, continue, dérivable, et donner son sens de variation.
2. Donner les limites en 0 et $+\infty$, ainsi qu'un équivalent en 0.
3. En calculant $S(x+1)+S(x)$, donner un équivalent en $+\infty$.
4. Montrer que pour tout $x>0$, on a
$$S(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(1+e^{-t})}\,dt$$
on pourra utiliser $\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\,dt=\sqrt{\pi}/2$.

Exercice 13

Soit $S(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}f_n(x)$ où $f_n(x)=\frac{xe^{-nx}}{\ln n}$.

1. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer qu'il y a convergence normale sur tout $[a,+\infty[$ (ou $a>0$) mais pas sur $\mathbb{R}^+$
3. Montrer qu'il y a convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$.
4. Montrer que S est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+_*$.
5. Montrer que S n'est pas dérivable en 0.

Exercice 14

Soit $g\in\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ avec $g(0)=0$.

1. Étudier la convergence de la série $\sum g\left(\frac{x}{2^n}\right)$. On notera $h(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}g\left(\frac{x}{2^n}\right)$ la somme de la série. Montrer que h est continue sur $[0,1]$.
2. Déterminer toutes le fonctions $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue en 0 telles que, pour tout $x\in[0,1]$, $g(x)=f(x)-f(x/2)$. Montrer que les fonctions obtenues sont de classe $\mathscr{C}^1$.

Exercice 15 ***(Mines MP)***

Pour $x \in]-1,1[$, soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(1-x^n)}$.

1. Justifier la définition de f et étudier sa continuité.
2. Si $x \in]-1,1[$, montrer que $f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \ln(1+x^p)$.
3. Déterminer la limite de $f(x)$ en 1^-, puis trouver un équivalent.

Exercice 16 ***(ENS MP 2021 (PLSR) - corrigé)***

Soit $(\lambda_n)_{n\in N^-}$ une suite strictement croissante de réels strictement positifs. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|\lambda_n - n^2| \leqslant Cn$.
Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{x}{\lambda_n}\right)$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Donner un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$.