

# 16

# SUITES DE FONCTIONS

Dans ce chapitre, toutes les fonctions sont à valeurs dans  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

## I. CONVERGENCES

### Définition 30 (Convergences)

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions définies sur  $A \subset \mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$  et  $f$  une fonction de  $A$  vers  $\mathbb{K}$ . On dit que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **converge simplement** vers  $f$  sur  $A$  lorsque, pour tout  $x \in A$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$ , ou encore

$$\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

La fonction  $f$  est appelée limite simple de la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **converge uniformément** vers  $f$  sur  $A$  lorsque,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{\infty, A} = 0$ , ou encore

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall x \in A, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

La fonction  $f$  est appelée limite uniforme de la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$  sur les compacts de  $A$  lorsque pour tout compact  $K \subset A$ ,  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $K$ .

### Remarques :

- la convergence uniforme sur  $A$  entraîne la convergence simple,
- notamment la seule fonction vers laquelle la convergence peut être uniforme est la fonction limite simple
- on a les propriétés de linéarité habituelles (sur les limites simples et uniformes)
- la convergence uniforme sur les compacts de  $A$  n'entraîne pas la convergence uniforme sur  $A$

### Exercice 1 (CCP 9)

1. Soit  $X$  un ensemble,  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions de  $X$  dans  $\mathbb{C}$  et  $g$  une fonction de  $X$  dans  $\mathbb{C}$ . Donner la définition de la convergence uniforme sur  $X$  de la suite de fonctions  $(g_n)$  vers la fonction  $g$ .
2. On pose  $f_n(x) = \frac{n+2}{n+1} e^{-nx^2}$ .
  - (a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
  - (b) La suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge-t-elle uniformément sur  $]0, +\infty[$ ?
  - (c) Soit  $a > 0$ . La suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge-t-elle uniformément sur  $[a, +\infty[$ ?
  - (d) La suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge-t-elle uniformément sur  $]0, +\infty[$ ?

### Exercice 2 (CCP 13)

1. Soit  $(g_n)$  une suite de fonctions de  $X$  dans  $\mathbb{C}$ ,  $X$  désignant un ensemble non vide quelconque. On suppose que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $g_n$  est bornée et que la suite  $(g_n)$  converge uniformément sur  $X$  vers  $g$ . Démontrer que la fonction  $g$  est bornée.
2. On considère la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } |x| \leq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x} & \text{si } |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$$

Prouver que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$ . La convergence est-elle uniforme sur  $\mathbb{R}$ ?



## II. PROPRIÉTÉS

### Propriété 53 (Continuité, limites)

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions de  $A$  vers  $\mathbb{K}$ .

- **continuité** : si  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $A$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est continue sur  $A$  (resp. en  $a \in A$ ) alors  $f$  est continue sur  $A$  (resp. en  $a \in A$ ).
- **permutation des limites** : si  $a \in \overline{A}$ ,  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $A$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  admet une limite finie  $\ell_n \in \mathbb{K}$  en  $a$  alors la suite  $(\ell_n)$  converge vers  $\ell$  et  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ .

### Propriété 54 (Intégration/dérivation)

Si  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions de  $I$  vers  $\mathbb{K}$ .

- **dérivation** : si, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ ,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers  $f$  sur  $I$  et  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uniformément vers  $g$  sur  $I$  alors  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et  $f' = g$ . De plus  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$  sur les segments de  $I$ .
- **classe  $\mathcal{C}^k$**  : si, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$ , pour tout  $p < k$ ,  $(f_n^{(p)})_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers  $g_p$  sur  $I$  et  $(f_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$  uniformément vers  $g_k$  sur  $I$  alors  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$  et  $f^{(p)} = g_p$  pour  $p \in \llbracket 0; k \rrbracket$ . De plus chaque convergence est uniforme sur les segments de  $I$ .
- **intégration** : si  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers  $f$  sur  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt$ .
- **primitives** : si  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers  $f$  sur les segments de  $I$  et  $a \in I$ , alors  $(F_n)$ , où  $F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt$ , converge uniformément sur les segments vers  $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ .

### Exercice 3

Soit  $f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + n2^n x^2}$  pour  $x \in \mathbb{R}$ .

1. Étudier la convergence simple sur  $\mathbb{R}$  de  $(f_n)$ .
2. Calculer  $\int_0^1 f_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n$ . La convergence est-elle uniforme ?
3. Montrer que la convergence est uniforme sur tout  $[a, +\infty[$ , lorsque  $a > 0$ .

## III. EXERCICES

### CONVERGENCES DES SUITES DE FONCTIONS

#### Exercice 4

Étudier la convergence des suites de fonctions suivantes sur  $\mathbb{R}$  (convergence simple, uniforme, uniforme sur les compacts) :

- |  |                                      |                              |
|--|--------------------------------------|------------------------------|
| a) $f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right)$             | d) $f_n(x) = \frac{nx^3}{1 + nx^2}$  | g) $f_n(x) = \inf(n, x^2/n)$ |
| b) $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin\left(\frac{x}{n}\right)$ | e) $f_n(x) = \frac{x}{n(1 + x^n)}$   | h) $f_n(x) = nx^2 e^{-nx}$   |
| c) $f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^2}$                   | f) $f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^3 x^2}$ | i) $f_n(x) = e^{-x^n}$       |

#### Exercice 5

Soit, pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = \sin\left(\frac{n+1}{n}x\right)$ .

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions sur  $\mathbb{R}$ .
2. Montrer que la convergence est uniforme sur les segments  $[-A, A]$ .
3. Montrer qu'on n'a pas convergence uniforme sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 6 (Mines-Ponts MP)**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On définit la fonction  $g_n$  sur  $[0, 1]$  par  $g_n(t) = e^t(1 - t/n)^n$ .

1. Montrer que pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $|g'_n(t)| \leq \frac{e^t}{n}$  puis que, pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $|e^{-t} - (1 - t/n)^n| \leq \frac{t}{n}$ .
2. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  où

$$I_n(x) = \int_0^1 t^x \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt.$$

Étudier ensuite la convergence uniforme.

**Exercice 7 (Mines MP 2012)**

☆

1. Soit  $(K_n)$  une suite décroissante de fermés de  $[a, b]$  d'intersection vide. Montrer qu'il existe  $n_0$  tel que  $K_{n_0} = \emptyset$ .
2. Soit  $(f_n)$  une suite croissante de fonctions continues sur  $[a, b]$ , convergeant simplement vers une fonction  $f$  continue sur  $[a, b]$ . Montrer que la convergence est uniforme (indication : poser  $g_n = f - f_n$  et utiliser, pour  $\varepsilon > 0$  les ensembles  $K_N = \{x \in [a, b], g_N(x) \geq \varepsilon\}$ ).

**Exercice 8**

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions  $K$ -lipschitzienne sur un segment  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$  (à valeurs réelles), qui converge simplement vers une fonction  $f$ .

1. Montrer que  $f$  est également  $K$ -lipschitzienne.
2. Montrer que la convergence est uniforme.

**Exercice 9**

Soit  $P_n$  une suite de polynômes tous de degré inférieur ou égal à  $N$  convergeant simplement sur  $[a, b]$  vers une fonction  $f$ . En utilisant l'interpolation de Lagrange en  $N + 1$  points distincts de  $[a, b]$ , montrer que  $f$  est un polynôme de degré au plus  $N$  et prouver que la convergence est uniforme.

**Exercice 10 (Centrale MP 2021)**

Soient  $[a, b]$  un segment de  $\mathbb{R}$  avec  $a < b$ ,  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite de fonctions convexes définies sur  $[a, b]$ . On suppose que  $(f_n)$  converge simplement vers  $f$  sur  $[a, b]$ .

1. Montrer que  $f$  est convexe.
2. Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tels que  $a < \alpha < \beta < b$ . Montrer qu'il existe  $K \geq 0$  tel que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tous  $x, y \in [\alpha, \beta]$ ,  $|f_n(x) - f_n(y)| \leq K|x - y|$ .
3. En déduire que  $(f_n)$  converge uniformément sur  $[\alpha, \beta]$ . Y a-t-il convergence uniforme sur  $[a, b]$ ?  $a, b$ ?

**RAPPELS : THÉORÈME DE CONVERGENCE DOMINÉE****Exercice 11**

Soit  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  continue et bornée. On pose  $I_n = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-nx} dx$ .

1. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ , puis  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$ .
2. On suppose  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , de dérivée bornée et telle que  $f'(0) \neq 0$ . Déterminer un équivalent simple de  $nI_n - L$ .

**Exercice 12 (Mines MP 2021)**

Soit  $f \in \mathcal{C}^0([1, +\infty[, \mathbb{R})$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}^+$ , on pose  $f_n(x) = \int_1^{1+x/n} nf(t^n) dt$ . Étudier la convergence de la suite de fonctions  $(f_n)_{n \geq 1}$ .

**Exercice 13**

Soit  $I_n = \int_0^1 \ln(1 - t^n) dt$ . Déterminer la limite  $\ell$  de  $I_n$ , puis un équivalent de  $I_n - \ell$ .