

15

RÉDUCTION (PREMIÈRE PARTIE)

I. ÉLÉMENTS PROPRES D'UN ENDOMORPHISME

Propriété 46 (Éléments propres)

- si $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est un \mathbb{K} -ev, on appelle
 - **valeur propre** de u : tout $\lambda \in \mathbb{K}$ tel qu'il existe $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$,
 - **vecteur propre** de u : tout $x \in E$ non nul tel qu'il existe $\lambda \in K$ tel que $u(x) = \lambda x$,
 - **espace propre** de u pour λ : le sous-espace $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda \text{Id}) = \{x \in E, u(x) = \lambda x\}$
- on a l'équivalence, pour $x \neq 0$
 - x est un vecteur propre,
 - $(x, u(x))$ est une famille liée,
 - $D = \text{Vect}(x)$ est une droite stable par u
- en dimension finie, on a l'équivalence
 - λ est une valeur propre de u ,
 - l'endomorphisme $u - \lambda \text{Id}$ est non injectif (ou non bijectif),
 - $\det(u - \lambda \text{Id}) = 0$
- si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des valeurs propres distinctes :
 - les espaces $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_p}$ sont en somme directe,
 - si x_i est un vecteur non nul de E_{λ_i} pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ alors la famille (x_1, \dots, x_p) est libre.

Proposition 47 (Sous-espaces vectoriels stables)

- si u et v commutent alors $\ker v$ et $\text{Im } v$ sont stables par u .
- c'est notamment le cas lorsque v est un polynôme en u : $\ker u$, $\text{Im } u$, $E_\lambda = \ker(u - \lambda \text{Id})$ et $F_\lambda = \ker(u - \lambda \text{Id})^p$ sont stables par u .

Exercice 1 (TPE MP 2011)

Soit $f(P) = (X^3 + X)P' - (3X^2 - 1)P$ si $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que f définit un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ et déterminer ses éléments propres.

II. ÉLÉMENTS PROPRES D'UNE MATRICE

Définition 28

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$:

- **valeur propre** de A : tout $\lambda \in \mathbb{K}$ tel qu'il existe $X \in M_{n1}(\mathbb{K})$, $X \neq 0$, tel que $AX = \lambda X$,
- **vecteur propre** de A : tout $X \in M_{n1}(\mathbb{K})$ non nul tel qu'il existe $\lambda \in K$ tel que $AX = \lambda X$,
- **espace propre** de A pour λ : le sous-espace $E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I_n) = \{X \in M_{n1}(\mathbb{K}), AX = \lambda X\}$

Propriété 48 (Matrices et valeurs propres)

- si $A \in M_n(\mathbb{K})$, alors A et ${}^t A$ ont mêmes valeurs propres et $\dim E_\lambda(A) = \dim E_\lambda({}^t A)$.
- si $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, alors $\bar{\lambda} \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et les espaces propres associés sont de même dimension.



III. POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE

Propriété 49 (Polynôme caractéristique)

- Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$
- on note $\chi_A = \det(XI_n - A)$ le polynôme caractéristique de A ,
 - on a $\chi_A = X^n - \text{tr}(A)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det A$
 - $\lambda \in \text{Sp}(A)$ si et seulement si $\chi_A(\lambda) = 0$,
 - $\dim E_\lambda(A) = n - \text{rg}(A - \lambda I_n)$
 - si λ est de multiplicité $k \geq 1$ dans χ_A alors $1 \leq \dim E_\lambda(A) \leq k$
 - $\chi_A = \chi_{A^t}$

Exercice 2 (Mines MP 2012)

Soient A, B dans $M_n(\mathbb{R})$ et $C = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$. Déterminer son polynôme caractéristique en fonction de ceux de $A + B$ et $A - B$.

Exercice 3

Soient f et g deux endomorphismes d'un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie qui commutent. Montrer qu'ils admettent un vecteur propre commun.

IV. RÉDUCTION EN DIMENSION FINIE

Les espaces sont de dimension finie.

DIAGONALISATION

Propriété 50 (Diagonalisation)

- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on a équivalence
- u est diagonalisable (il existe une base \mathcal{B} de E dans laquelle $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale),
 - il existe une base de E formée de vecteurs propres de u
 - $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$,
 - $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) = \dim E$
- Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, on a l'équivalence entre
- A est diagonalisable (c'est-à-dire A est semblable à une matrice diagonale),
 - il existe une base (X_1, \dots, X_n) de $M_{n1}(\mathbb{K})$ avec $AX_i = \lambda_i X_i$,
 - $M_{n1}(\mathbb{K}) = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A)} E_\lambda(A)$,
 - $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \dim E_\lambda(A) = n$.

Proposition 51 (Critère de diagonalisabilité avec le polynôme caractéristique)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé sur \mathbb{K} et pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$, $\dim E_\lambda(u) = n_\lambda$ où n_λ est la multiplicité de λ dans χ_u .

Remarques :

- lorsque χ_u est scindé à racines simples alors u est diagonalisable et chacun des n sous-espaces propres est de dimension 1,
- lorsque χ_u admet une unique racine λ , alors u est diagonalisable si et seulement si $u = \lambda \text{Id}$.

TRIGONALISATION

Définition 29 (Endomorphisme trigonalisable)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est trigonalisable lorsqu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

**Propriété 52 (Caractérisations)**

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence

- u est trigonalisable,
- le polynôme caractéristique χ_u est scindé,

Exercice 4 (CCP 73)

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A .
2. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
3. En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\text{Vect}(I_2, A)$.

Exercice 5 (CCP 72)

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n , et soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On suppose que $f(e_1) = f(e_2) = \dots = f(e_n) = v$, où v est un vecteur donné de E .

1. Donner le rang de f .
2. f est-il diagonalisable? (discuter en fonction du vecteur v)

Exercice 6 (Trigonalisation)

Soit

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer qu'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = T$ où T est la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer alors A^n pour $n \in \mathbb{N}$ puis dans \mathbb{Z} (en fonction de P).

V. EXERCICES

RÉDUCTION MATRICIELLE

Exercice 7

Montrer que la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ suivante est diagonalisable et la réduire, sans calculer son polynôme caractéristique :

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & a \end{pmatrix}$$

Exercice 8 (Mines MP 2015)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$. On note M la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ avec $M_{i,j} = b$ si $i \neq j$ et $M_{i,i} = a$.

1. Déterminer les valeurs propres de M . La matrice est-elle diagonalisable?
2. Déterminer les (a, b) pour lesquels M est inversible. Calculer alors M^{-1} .
3. Déterminer M^p pour $p \in \mathbb{N}$.

**Exercice 9**

Soit

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$$

Diagonaliser J_n dans $M_n(\mathbb{C})$ et en déduire le déterminant de

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$$

Exercice 10 (CCP MP 2018)Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie n et p un projecteur.

- Exprimer $\det(\text{Id}_E + \lambda p)$ en fonction de $\text{rg } p$ et λ .
On pose $V = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $B = {}^t V V$.
- Déterminer $\text{rg } B$.
- Montrer que B est diagonalisable. Calculer ses valeurs propres et la dimension de ses espaces propres.
- On pose M la matrice avec $m_{ij} = 1 + a_i^2$ si $i = j$ et $m_{ij} = a_i a_j$ sinon. Trouver $\det M$.

RÉDUCTION D'ENDOMORPHISMES - CALCULS**Exercice 11 (sous-espaces stables)**

$$\text{Soit } M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Quels sont les sous-espaces de \mathbb{R}^3 stables par M ?
- Un sous-espace de \mathbb{R}^3 stable par M admet-il toujours un supplémentaire stable par M ?

Exercice 12Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et T l'endomorphisme de E qui à f associe F définie par

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- Montrer que T est un endomorphisme de E .
- Déterminer ses éléments propres.

Exercice 13Soit $E = \mathbb{R}^n$ et p un projecteur de E de rang r . On considère l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ suivant :

$$\phi : f \mapsto p \circ f + f \circ p.$$

Cet endomorphisme est-il diagonalisable? Quels sont ses éléments propres? On pourra travailler dans une base adaptée à p .**Exercice 14 (produit tensoriel - exemple)**

Soit A une matrice diagonalisable et $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice diagonalisable. Montrer que $M = \begin{pmatrix} aA & bA \\ cA & dA \end{pmatrix}$ est aussi diagonalisable - on cherchera des vecteurs propres sous la forme $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$.

**Exercice 15**

Soit $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$, et φ l'endomorphisme de E défini par

$$P \mapsto (X^2 - 1)P' - 2nXP.$$

Montrer que φ est bien un endomorphisme de E . Déterminer les éléments propres de φ . L'endomorphisme est-il diagonalisable?

Exercice 16

Soit $U \in M_n(\mathbb{C})$ et $V = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ U & 0 \end{pmatrix}$.

1. Relier les sous-espaces propres de V à ceux de U .
2. Donner une CNS sur U pour que V soit diagonalisable

RÉDUCTION D'ENDOMORPHISMES - PLUS THÉORIQUE**Exercice 17 (Mines MP 2015)**

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$.

1. Que dire de u si sa matrice dans toute base est diagonale?
2. Que dire de u s'il a même matrice dans toute base?

Exercice 18 (matrices semblables)

Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ semblables dans $M_n(\mathbb{C})$ (il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = P^{-1}.B.P$). En écrivant $P = P_1 + iP_2$ où P_1 et P_2 sont réelles, montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$(P_1 + \lambda P_2)A = B(P_1 + \lambda P_2).$$

En déduire que A et B sont semblables dans \mathbb{R} .

Exercice 19

Soit u un endomorphisme de E , espace vectoriel sur \mathbb{C} de dimension n . On suppose que tout sous-espace stable par u admet un supplémentaire stable par u . Montrer que u est diagonalisable.

Exercice 20 (Réduction de la comatrice)

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et B la transposée de la comatrice. Montrer que tout vecteur propre de A est vecteur propre de B . On envisagera trois cas en fonction du rang de A .

Exercice 21 (Mines MP 2011)

Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie, $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g - g \circ f = f$.

1. Calculer $f^k \circ g - g \circ f^k$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. En déduire que f est nilpotent (on pourra utiliser l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ défini par $h \mapsto h \circ g - g \circ h$).
2. Montrer que f et g ont un vecteur propre commun.
3. On suppose qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $f \circ g - g \circ f = \alpha f + \beta g$. Montrer que f et g ont un vecteur propre commun.

Exercice 22 (Mines MP 2011)

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$. On suppose que le polynôme caractéristique de A est scindé à racines simples.

1. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $B = P(A)$.
2. Quelle condition imposer au degré de P pour avoir unicité?

Exercice 23 (Mines MP 2019)

Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, f et g deux endomorphismes de E . On suppose que f est inversible et g de rang 1. Montrer que $f + g$ est inversible si et seulement si $\text{tr}(g \circ f^{-1}) \neq -1$.

Exercice 24 (Mines MP 2017)

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ de rang 2. Exprimer son polynôme caractéristique en fonction de $\text{tr}(A)$ et $\text{tr}(A^2)$.

**Exercice 25 (Mines MP 2013)**

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0$. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient triangulaires supérieures.

Exercice 26 (Mines MP 2017)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n la matrice dont les coefficients a_{ij} valent 1 lorsque $i \geq j$ et $i = 1, j = n$ et 0 sinon.

1. Quel est le polynôme caractéristique de A_n ?
2. Montrer que A_n admet une unique valeur propre λ_n dans $]1, +\infty[$.
3. Montrer que $\lambda_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{2 \ln n}$.

Exercice 27 (Polytechnique 2020)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A_{i,i} = \lambda_i$ si $1 \leq i \leq n$, $A_{i,i+1} = 1$ si $1 \leq i \leq n-1$ et $A_{i,j} = 0$ si $j \notin \{i, i+1\}$. À quelle condition A est-elle diagonalisable ?

Exercice 28 (D'après ENS MP 2018)

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose que toute droite est stable par A . Montrer que A est une homothétie.
2. Soit $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$. On suppose que tout sous-espace vectoriel de dimension k est stable par A . Montrer que A est une matrice scalaire.
3. Déterminer les matrices de $GL_n(\mathbb{C})$ qui commutent avec tous les éléments de leur classe de conjugaison.