

13

SÉRIES NUMÉRIQUES

I. GÉNÉRALITÉS

L'ESSENTIEL - SÉRIES NUMÉRIQUES

→ si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite numérique :

- on note $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ la somme partielle (d'ordre n) de la série numérique de terme général u_n (on note $\sum u_n$ pour désigner « la série de terme général u_n »)
- on dit que $\sum u_n$ converge lorsque (S_n) admet une limite finie, sinon on dit qu'elle diverge,
- lorsque $\sum u_n$ converge, on note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ la limite de la suite des sommes partielles. On note alors $R_n = S - S_n$ le reste d'ordre n . On a alors $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

→ on ne change pas *la nature* d'une série en changeant ses premiers termes (on peut utiliser des sommes partielles $S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k$)

→ si $\sum u_n$ converge alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ (et également $R_n = S - S_n \rightarrow 0$)

→ avec les notations précédentes, $u_n = S_n - S_{n-1}$ et, si la série converge, $u_n = R_{n-1} - R_n$.

→ étudier la suite (u_n) est équivalent à étudier la série $\sum (u_n - u_{n-1})$ (ou $\sum (u_{n+1} - u_n)$).

II. SÉRIES À TERMES POSITIFS

Proposition 36 (résultat fondamental)

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. La suite des sommes partielles (S_n) est croissante. Elle est soit majorée et converge vers sa borne supérieure, soit non majorée et croissante vers $+\infty$.

L'ESSENTIEL - SÉRIES À TERMES POSITIFS

→ soient deux séries à **termes positifs** $\sum u_n$ et $\sum v_n$:

- si pour $n \geq n_0$, $0 \leq u_n \leq v_n$ alors $\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge,
- si $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ ou $u_n = O_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ alors $\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge,
- si $u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ alors $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum v_n$ converge

→ séries de référence :

- $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$,
- $\sum q^n$ converge si $0 \leq q < 1$ et diverge si $q \geq 1$ (plus généralement $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$),
- $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$ (hors prog.)

→ règles de Riemann : soit $\sum u_n$ à termes positifs

- s'il existe $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n$ tend vers une limite finie ou est borné alors $\sum u_n$ converge,
- si nu_n est minorée par $\ell \neq 0$, tend vers $\ell \neq 0$ ou vers $+\infty$ alors $\sum u_n$ diverge.

→ critère de d'Alembert : soit $\sum u_n$ une série à termes **strictement positifs**. Si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ admet une limite finie ℓ alors :

- si $\ell \in [0, 1[$, alors $\sum u_n$ converge,
- si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge,
- si $\ell = 1$, alors on ne peut rien dire.

Proposition 37 (Comparaison série-intégrale)

Soit $f : [n_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux, décroissante et positive. La série $\sum \left(\int_{n-1}^n f(t) dt - f(n) \right)$ converge (ainsi que $\sum \left(f(n) - \int_n^{n+1} f(t) dt \right)$). Notamment $\sum f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[n_0, +\infty[$.



MÉTHODE - ÉTUDIER LA NATURE D'UNE SÉRIE À TERMES POSITIFS

Lorsque $\sum u_n$ est à termes positifs :

- comparaison à une série de référence (série de Riemann) par \sim, o, \leq
- comparer en utilisant les règles de Riemann (si on ne voit pas comment faire la comparaison directement),
- critère de d'Alembert (essentiellement lorsqu'il y a des produits, puissances, factorielles),
- comparaison série-intégrale
- majoration des sommes partielles (suite des sommes partielles croissante et majorée),
- retour aux sommes partielles (calculs, simplifications par télescopage, transformations)

Proposition 38 (équivalents, développement)

- on a la formule de Stirling : $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} = \sqrt{2\pi n} n^{n+1/2} e^{-n}$
- on a $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$ (hors prog. mais utilisé fréquemment)

III. SÉRIES QUELCONQUES

L'ESSENTIEL - SÉRIES À TERMES QUELCONQUES

- convergence absolue : si $\sum |u_n|$ converge alors $\sum u_n$ converge
- théorème des séries alternées : soit $\sum u_n$ où $u_n = (-1)^n a_n$ avec a_n de signe constant et $(|u_n|)$ **décroissante de limite nulle**, alors
 - $\sum u_n$ converge,
 - pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|R_n| \leq |u_{n+1}|$ et R_n et u_{n+1} sont de même signe (R_n du signe de son premier terme)
 - notamment $|S_n|$ et $|S|$ sont majorées par $|u_0|$ (et du signe de u_0).

Remarque : dans le théorème des séries alternées, si $(|u_n|)$ est décroissante à partir du rang n_0 seulement, on a toujours la convergence, la majoration des restes (et leur signe) à partir du rang n_0 (mais plus la majoration des sommes partielles ou de la somme).

⚠ Attention

Majoration Si $\sum u_n$ est à termes quelconques, majorer $|S_n| = \left| \sum_{k=0}^n u_k \right|$ **ne sert à rien** pour étudier la convergence de la série. Seul le cas où les termes sont positifs donne un résultat lorsqu'on majore les sommes partielles. On peut cependant majorer $\sum_{k=0}^n |u_k|$ indépendamment de n pour étudier la convergence absolue de la série - ce n'est pas en général la méthode à tester en premier lieu.

L'ESSENTIEL - PRODUIT DE CAUCHY, EXPONENTIELLE

- si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries de complexes, on appelle série produit la série de terme général $w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$.
- si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes alors la série produit est absolument convergente et

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} w_n \right)$$

- on définit sur \mathbb{C} , $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$. On a $\exp(z + z') = \exp(z) \exp(z')$.



MÉTHODE - ÉTUDIER LA NATURE D'UNE SÉRIE À TERMES QUELCONQUES

- on étudie la convergence de la série à termes positifs $\sum |u_n|$,
- on regarde si le TSA s'applique,
- on effectue un développement asymptotique du terme général (jusqu'à un terme de signe constant ou de série absolument convergente),
- on transforme la somme partielle afin de montrer qu'elle a une limite finie.



IV. SOMMATION DES RELATIONS DE COMPARAISON

L'ESSENTIEL - SOMMATION DES RELATIONS DE COMPARAISON

soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries avec, pour tout $n \geq n_0$, $v_n \geq 0$

→ Cas d'une série convergente (comparaison des restes) : si $\sum v_n$ converge

• si $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ alors $\left(\sum_{k=n}^{+\infty} u_k\right) = o_{n \rightarrow +\infty}\left(\sum_{k=n}^{+\infty} v_k\right)$ (idem avec o)

• si $u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ alors $\left(\sum_{k=n}^{+\infty} u_k\right) \sim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=n}^{+\infty} v_k\right)$,

→ Cas d'une série divergente (comparaison des sommes partielles) : si $\sum v_n$ diverge

• si $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ alors $\left(\sum_{k=0}^n u_k\right) = o_{n \rightarrow +\infty}\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$ (idem avec o)

• si $u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ alors $\left(\sum_{k=0}^n u_k\right) \sim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$,

V. EXERCICES

NATURE, SOMME, ÉQUIVALENTS

Exercice 1

Déterminer la nature des séries de terme général :

a) $\ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$

b) $\frac{\ln n}{\sqrt{n^3+1}}$

c) $\frac{1}{\sqrt{n+2}^{(-1)^n}}$

d) $\frac{1}{n}(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})$

e) $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

f) $(\ln n)^{-\ln n}$

g) $\frac{2.4.6 \cdots (2n)}{n^n}$

h) $n^{1/n} - 1$

i) $3^{-\sqrt{n}}$

j) $\left(\operatorname{ch} \frac{1}{n}\right)^{n^3}$

Exercice 2

Déterminer la nature des séries de terme général (les paramètres qui apparaissent sont des réels) :

a) $n^\alpha \ln(1 + e^{-na})$

b) $\ln\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)$

et

$\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$

c) $\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n \sqrt{n}}$

d) $n^{n^\alpha} - 1$

Exercice 3

Déterminer la nature des séries de terme général :

a) $\sqrt{n+(-1)^n} - \sqrt{n}$

b) $(-1)^n \sqrt[n]{n} \sin \frac{1}{n}$

c) $\frac{(-1)^n}{n + \sin n}$

d) $\cos(\pi \sqrt{n^2+n+1})$

e) $(-1)^n \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

Exercice 4 (Mines MP)

Soit $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{\cos(2k\pi/3)}{k}$.

1. Trouver a, b et c tels que $T_{3n} = a \sum_{k=1}^n \frac{1}{3k} + b \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3k+1} + c \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3k+2}$.

2. En déduire que T_n converge et donner sa limite.

**Exercice 5**

Calculer les somme suivantes si elles existent :

a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{(3n+1)(3n+4)}$

b) $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2n} \operatorname{ch} n.$

c) $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

d) $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$

Exercice 6 (Mines MP)1. Soit $c_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k} - \frac{\ln^2 n}{2}$ pour $n \geq 1$. Montrer que la suite c_n converge.2. Trouver des réels r, s et t tels que, pour tout $n \geq 2$, $\sum_{k=2}^{2n} (-1)^k \frac{\ln k}{k} = r \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + s \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k} + t \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln k}{k}.$ 3. Exprimer $\sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k}$ en fonction de la constante d'Euler.**Exercice 7**Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n \ln^2 k$. Même question avec celle de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}.$ **Exercice 8**Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_n = \frac{1}{n} e^{-u_{n-1}}.$

- Nature de la série $\sum u_n$
- Nature de la série $\sum (-1)^n u_n$

Exercice 9Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par un premier terme $u_0 \in]0, 1[$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2.$

- Etudier rapidement la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Donner la nature des séries de terme général $u_n^2, \ln \frac{u_{n+1}}{u_n}, u_n.$
- Déterminer un réel β tel que $u_{n+1}^\beta - u_n^\beta$ converge vers un réel non nul.
- Donner la nature de la série de terme général u_n^α où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 10

Soit

$$u_n = \prod_{k=2}^n \left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)$$

Étudier la convergence de la suite $(\ln(\sqrt{n} u_n))$ puis celle de la série $\sum u_n.$ **Exercice 11 (Mines MP 2017)**Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Déterminer la nature de $\sum u_n.$ **Exercice 12**Soit $u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{i}{k^2}\right)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier la convergence de la suite $(u_n).$ **Exercice 13 (Mines MP 2018)**Soit (x_n) une suite de premier terme $x_0 > 0$ et vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$. Montrer que $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2n}.$



UTILISATION DES SÉRIES POUR LES INTÉGRALES

Exercice 14

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ décroissante et de limite nulle en $+\infty$. On note $a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t) \sin(t) dt$.

1. Justifier la convergence de $\sum a_n$.
2. Prouver la convergence de $\int_0^{+\infty} f(t) \sin t dt$.
3. Montrer que $t \mapsto f(t) \sin(t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ si et seulement si f l'est.

Exercice 15

Étudier l'intégrabilité sur \mathbb{R}^+ de la fonction $t \mapsto \frac{t}{1+t^6 \sin^2 t} dt$ en étudiant la série de terme général

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{t}{1+t^6 \sin^2 t} dt$$

EXERCICES THÉORIQUES

Exercice 16 (Règle de Duhamel)

1. Soit (u_n) une suite de réels positifs. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O(\frac{1}{n^2})$ où $\alpha \in \mathbb{R}$. En étudiant la suite $v_n = n^\alpha u_n$, montrer que la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
2. On choisit alors a et b deux réels non entiers, déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{a(a+1) \cdots (a+n-1)}{b(b+1) \cdots (b+n-1)}.$$

3. (Mines MP) Soit $a > 0$. Nature de la série de terme général $u_n = \frac{n!}{\prod_{k=1}^n (a+k)}$.

Exercice 17 (Mines MP)

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par $u_1 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^\alpha u_n}$ si $n \geq 1$.

1. Montrer que (u_n) est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
2. On suppose $\alpha > 1$ et on note ℓ la limite de (u_n) . Déterminer un équivalent de $\ell - u_n$.
3. On suppose $\alpha < 1$. Déterminer un équivalent de $u_{n+1}^2 - u_n^2$, puis un équivalent de u_n^2 .

Exercice 18

Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\sum a_n$ diverge. On note S_n la somme partielle de la série.

1. Montrer que $\sum_{k=1}^p \frac{a_{n+k}}{S_{n+k}} \geq 1 - \frac{S_n}{S_{n+p}}$.
2. En déduire que la série $\sum \frac{a_n}{S_n}$ diverge.
3. Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a $\frac{a_n}{S_n^2} \leq \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}$.
4. En déduire que $\sum \frac{a_n}{S_n^2}$ converge.
5. Généraliser aux séries $\sum \frac{a_n}{S_n^\alpha}$ lorsque $\alpha > 0$.

Exercice 19 (Mines MP)



Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle bornée telle que $(u_n + \frac{1}{2} u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

**Exercice 20**

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels telle que $\sum \frac{a_n}{n}$ converge. Justifier que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = 0.$$

Exercice 21

Soit f une fonction continue, positive, décroissante et intégrable sur \mathbb{R}_+ .

1. Justifier pour tout $h > 0$ la convergence de la série $\sum f(nh)$.
2. Déterminer $\lim_{h \rightarrow 0^+} h \sum_{n=0}^{+\infty} f(nh)$.
3. (☆☆) Généraliser les résultats lorsqu'il existe $t_0 > 0$ tel que f est décroissante sur $[t_0, +\infty[$ (et intégrable sur \mathbb{R}^+).

Exercice 22 (Centrale MP 2016)

Soient f une fonction de classe \mathcal{C}^2 de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telle que $\|f'\|_\infty < 1$, a un point fixe de f et $\lambda = f'(a)$. On suppose $\lambda \neq 0$. Soit (u_n) une suite d'éléments de $[0, 1]$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $e_n = u_n - a$ et $v_n = e_n \lambda^{-n}$.

1. Montrer que $\sum |e_n|$ converge, puis qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $u_n = a + k\lambda^n + o(\lambda^n)$.
2. Montrer qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $u_n = a + k\lambda^n + \ell\lambda^{2n} + o(\lambda^{2n})$.

Exercice 23

Étudier la suite u définie par son premier terme $u_1 = a > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \frac{n+1}{2n} \sqrt{u_n}$

Exercice 24 (Polytechnique 2022)

Soit P et Q deux éléments de $\mathbb{R}[X]$, de même degré $d \geq 1$. On écrit $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$, $Q = \sum_{k=0}^d b_k X^k$ et on suppose que $\frac{a_{d-1}}{a_d} \neq \frac{b_{d-1}}{b_d}$. Soit $u \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{P(n)}{Q(n)}$ pour n assez grand. Montrer qu'il existe trois constantes a, b, c telles que $u_n \sim a n^b c^n$ et $a > 0$.

Exercice 25 (Polytechnique MP 2021)

Soit $(u_n)_{n \geq 0} \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante, telle que $u_0 = 1$ et telle que la série de terme général $\frac{u_n^2}{u_{n+1}}$ converge. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n^2}{u_{n+1}} \geq 4$.