9 Ensembles, applications

I. Applications

Injectivité, surjectivité, bijectivité

Soit E et F deux ensembles et f une application de E dans F.

Définition 14

- → f est une *surjection* si tout élément de F admet au moins un antécédent.
- → f est une *injection* si tout élément de F admet au plus un antécédent
- → f est une *bijection* si tout élément de F admet un et un seul un antécédent

Méthode

Soit $f : E \to F$
- → Surjective : soit $y \in F$, on explicite les conditions qui traduisent que $y \in F \dots$ on a trouvé/construit $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
- → Injectivité : on prouve que si deux éléments x et x' ont la même image alors ce sont les mêmes : soit $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x') \dots$ on a $x = x'$.
- → f est bijective : la plupart du temps, on montre séparément l'injectivité et la surjectivité.

Définition 15 *(Application réciproque)*

Soit f est une application bijective de E dans F. Il existe une unique application g de F dans E telle que $y = f(x)$ équivaut à $x = g(y)$ (pour $x \in E$ et $y \in F$). Cette application est appelée *application réciproque* de f (ou simplement *réciproque* ou *inverse*), elle est notée f^{-1}.

Proposition 32 *(Composition)*

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.
- → Si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.
- → Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.
- → Si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Exercice 1

Montrer ces propriétés.

Attention

Inverses à droite ou à gauche $f : E \to F$ est inversible lorsqu'il existe une fonction $g : F \to E$ telle que $g \circ f = id_E$ (inverse à gauche) et $f \circ g = id_F$ (inverse à droite). L'existence d'une seule de ces conditions ne permet pas d'affirmer que f est bijective. En revanche, si on sait par ailleurs que f est bijective, il suffit de trouver g telle que $f \circ g = id$ ou $g \circ f = id$.

Images directes et réciproques

Méthode - Rappels sur les ensembles

- → Pour montrer qu'un ensemble A est inclus dans un ensemble B, la démonstration se fait toujours de la même façon :

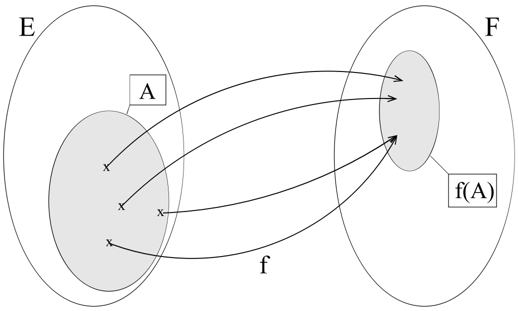
  Soit $x \in A$, on traduit les conditions sur $x \dots$ alors $x \in B$.

- → Pour montrer que deux ensembles A et B sont égaux, on montre les deux inclusions $A \subset B$ et $B \subset A$.
- → Pour prouver qu'un élément est dans l'intersection $A \cap B$, on montre qu'il est à la fois dans A et dans B.

Définition 16 *(Image directe)*

Soit $f : E \to F$ une application et $A \subset E$. On note $f(A)$ le sous-ensemble de F appelé *image directe* de A par f, défini par

$$f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A, y = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in A\}.$$



MÉTHODE - IMAGE DIRECTE

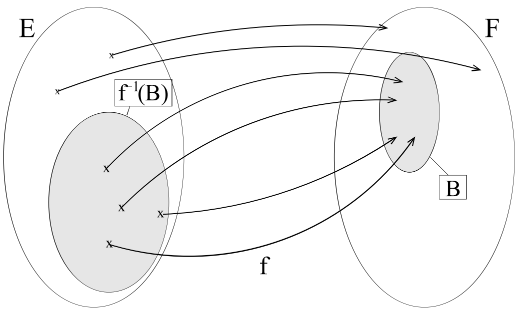
→ Lorsqu'on doit montrer qu'un élément y est dans $f(A)$, on construit $x \in A$ tel que $y = f(x)$.
→ Lorsqu'on a besoin de $y \in f(A)$, on écrit : soit $y \in f(A)$, il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$.

Définition 17 *(Image réciproque)*

Soit $f : E \to F$ une application et $B \subset F$. On note $f^{-1}(B)$ le sous-ensemble de E appelé image réciproque de B par f, défini par

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

Il faut comprendre ce que désigne cet ensemble en « lisant à l'envers l'application » : $f^{-1}(B)$ désigne l'ensemble des éléments de l'ensemble de départ dont l'image tombe dans B.



MÉTHODE - IMAGE RÉCIPROQUE

→ Pour prouver qu'un élément x est dans $f^{-1}(B)$: il suffit de montrer que $f(x) \in B$.
→ Lorsqu'on utilise un élément x de $f^{-1}(B)$, on écrit $f(x) \in B$ pour poursuivre la démonstration.

Attention

Deux notations Il ne faut pas confondre

→ l'application réciproque f^{-1} qui n'existe que lorsque f est bijective et elle agit sur les éléments de l'ensemble d'arrivée,
→ l'application « image réciproque » qui agit sur les sous-ensembles de l'ensemble d'arrivée et qui existe toujours.

Lorsque f est bijective, ces deux notations sont liées car on a $f^{-1}(\{y\}) = \{f^{-1}(y)\}$.

Propriété 33 *(Images directes et réciproques)*

Soit $f : E \to F$, A et B des sous-ensembles de E ou F :
- → $A \subset B$ implique $f(A) \subset f(B)$.
- → $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ avec égalité lorsque f est injective.
- → $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- → $A \subset B$ implique $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.
- → $f(f^{-1}(B)) \subset B$ avec égalité si f est surjective.
- → $B \subset f^{-1}(f(B))$ avec égalité si f est injective.
- → $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
- → $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
- → si $f : E \to F$ et $g : F \to G$:
  - si $A \subset E$ alors $g(f(A)) = (g \circ f)(A)$
  - si $B \subset G$ alors $f^{-1}(g^{-1}(B)) = (g \circ f)^{-1}(B)$

Exercice 2

Montrer ces propriétés

RELATION D'ÉQUIVALENCE ET ENSEMBLE QUOTIENT

Définition 18 *(Relation d'équivalence, ensemble quotient)*

Soit E un ensemble. On dit qu'une relation entre deux éléments $x\mathcal{R}y$ est une relation d'équivalence lorsqu'elle est
- → *réflexive* : pour tout $x \in E$, $x\mathcal{R}x$,
- → *symétrique* : pour tout $x, y \in E$, si $x\mathcal{R}y$ alors $y\mathcal{R}x$,
- → *transitive* : si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ alors $x\mathcal{R}z$.

On peut alors créer une partie de l'ensemble en considérant les sous-ensembles suivants, appelés classes d'équivalence

$$\text{si } x \in E, \overline{x} = \{y \in E, x\mathcal{R}y\}.$$

Si $x, y \in E$, on a soit $\overline{x} = \overline{y}$, soit $\overline{x} \cap \overline{y} = \emptyset$. On note alors $E/\mathcal{R}$ l'ensemble constitué par les classes d'équivalences créées par cette relation. Si $z \in E/\mathcal{R}$ est une classe d'équivalence, on appelle représentant de cette classe tout élément $x \in E$ tel que $\overline{x} = z$. On définit alors une surjection (appelée surjection canonique) :

$$p : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E/\mathcal{R} \\ x & \mapsto & \overline{x} \end{array} \right.$$