8 CONVERGENCE DOMINÉE

I. THÉORÈME DE CONVERGENCE DOMINÉE

Théorème 4 *(convergence dominée)*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continue par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si
- → **convergence :** la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction f,
- → **régularité :** la fonction f est continue par morceaux sur I,
- → **domination :** il existe une fonction φ intégrable sur I telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leqslant \varphi$,

alors
- → les fonctions f_n, la fonction f sont intégrables sur I,
- → on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_I f_n(t)\,dt = \int_I f(t)\,dt$.

II. THÉORÈMES POUR LES INTÉGRALES DÉPENDANT D'UN PARAMÈTRE

Théorème 5 *(Continuité)*

Soit $h : (x,t) \in A\times I \mapsto h(x,t) \in \mathbb{K}$. Si
- → pour tout $x \in A$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue par morceaux sur I,
- → pour tout $t \in I$, $x \mapsto h(x,t)$ est continue sur A,
- → il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que $\forall x \in A, t \in I, |h(x,t)| \leqslant \varphi(t)$,

alors $F : x \mapsto \displaystyle\int_I h(x,t)\,dt$ est continue sur A.

Théorème 6 *(Dérivation)*

Soit $h : (x,t) \in A\times I \mapsto h(x,t) \in \mathbb{K}$. Si
- → pour tout $x \in A$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue par morceaux sur I et intégrale sur I
- → pour tout $t \in I$, $x \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A,
- → pour tout $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I
- → il existe $\psi : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que $\forall x \in A, t \in I, \left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \psi(t)$,

alors $F : x \mapsto \displaystyle\int_I h(x,t)\,dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A et, pour tout $x \in A$, $F'(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\,dt$.

Théorème 7 *(Limite)*

Soit $h : (x,t) \in A\times I \mapsto h(x,t) \in \mathbb{K}$ et a adhérent à A (éventuellement $\pm\infty$). Si
- → pour tout $x \in A$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue par morceaux sur I,
- → pour tout $t \in I$, $\displaystyle\lim_{x\to a} h(x,t) = g(t)$
- → il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que $\forall x \in A, t \in I, |h(x,t)| \leqslant \varphi(t)$,

alors $\displaystyle\lim_{x\to a}\int_I h(x,t)\,dt = \int_I g(t)\,dt = \int_I \lim_{x\to a} h(x,t)\,dt$.

Remarque : les propriétés de continuité et dérivabilité étant locale (il suffit de pouvoir le faire au voisinage de chaque point - ou sur chaque segment de A), on sera fréquemment amené à appliquer ces théorèmes sur un domaine $K \subset A$.

Théorème 8 *(Dérivation d'ordre n)*

Soit $h : (x,t) \in A \times I \mapsto h(x,t) \in \mathbb{K}$. Si

- → pour tout $t \in I$, $x \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur A,
- → pour tout $k \in [\![0\,;n-1]\!]$, $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur I et intégrale sur I,
- → pour tout $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t)$ est continue par morceaux sur I
- → il existe $\psi : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que $\forall x \in A, t \in I, \left|\dfrac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t)\right| \leqslant \psi(t)$,

alors $F : x \mapsto \displaystyle\int_I h(x,t)\,dt$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur A et, pour tout $x \in A$ et $k \in [\![0\,;n]\!]$, $F^{(k)}(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t)\,dt$.

Remarque : la domination porte uniquement sur la dernière dérivée. Sur les dérivées précédentes, on a simplement besoin d'une intégrabilité à x fixé. Assez fréquemment, lorsqu'on doit montrer que F est $\mathscr{C}^\infty$, on est toutefois amené à déterminer une telle fonction dominante pour chaque dérivée (afin d'obtenir le résultat par récurrence sur n)

III. EXERCICES

Exercice 1

Déterminer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$ de

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^n x\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^n + e^x}\,dx$ c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{x^{2n} + x^n + 1}}\,dx$ d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x/n}}{1+x^2}\,dx$

Exercice 2

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ bornée. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} f(0)$.

Exercice 3 ***(Mines MP 2010)***

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^{n+1}}$.

1. Déterminer la nature de la suite (a_n).
2. Déterminer un équivalent de a_n.

Exercice 4

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $1 < (1+1/n)^n < e$.
2. En déduire que, si f est continue et intégrable sur $[1, e[$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^{(1+1/n)^n} x^{1/n} f(x)\,dx = \int_1^e f(x)\,dx.$$

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue et bornée. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)e^{-nx}\,dx$.

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$, puis $L = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} nI_n$.
2. On suppose f de classe $\mathscr{C}^1$, de dérivée bornée et telle que $f'(0) \neq 0$. Déterminer un équivalent simple de $nI_n - L$.

Exercice 6

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt.$$
2. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.
3. on rappelle la formule de Wallis : $\int_0^{\pi/2} \sin^p(t)\,dt \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2p}}$. En déduire la valeur de
$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt.$$

Exercice 7 ***(très classique)***

Soient $f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2$ et $g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$.

1. Montrer que f et g sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer leur dérivée.
2. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, on a $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$.
3. En déduire $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

Exercice 8

On définit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2} e^{-t}\,dt$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, calculer f'' et en déduire f.

Exercice 9 ***(Mines MP 2011)***

Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t} e^{-xt}\,dt$. Donner son domaine de définition, calculer sa dérivée et donner une expression simple de f.

Exercice 10

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\,dt$ est définie.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner une expression simple pour $f'(x)$.
4. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - \pi \ln x\right)$.
5. En déduire une expression simple pour f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11

On note $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,dt$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f, étudier sa continuité, sa parité et montrer que f est bornée sur son ensemble de définition.
2. Montrer que pour tout $x > 0$, on a $xf(x) = 2\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}\,dt$.
3. Montrer que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, puis $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $f'' = f$.
4. En déduire une expression simple pour f.
5. Simplifier $\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{x^2+t^2}\,dt$.

Exercice 12 ***(Mines MP 2011)***

Soit g continue sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs réelles telle que $\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$ converge et vaut ℓ. Montrer que $f(x) = \int_0^{+\infty} g(t)e^{-xt}\,dt$ tend vers ℓ lorsque x tend vers 0^+.

Exercice 13

On définit, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\left(t^2+\frac{x^2}{t^2}\right)}\,dt$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$
3. Déterminer une équation différentielle simple vérifiée par f (on utilisera un changement de variable).
4. En déduire une expression simple de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14 ***(Intégrale de Fresnel)***

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$. En déduire la valeur de ces intégrales (*indic :* effectuer un changement de variable $u = x - \frac{1}{x}$ au bon endroit).
2. On définit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i}\mathrm{d}t$. Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$. Déterminer la limite de F en $+\infty$.
3. Justifier que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, déterminer et simplifier sa dérivée (on pourra utiliser $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$).
4. Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{it^2}\mathrm{d}t$ converge et donner sa valeur.

EXERCICES EN VRAC

Exercice 15 ***(Mines MP 2021)***

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\int_1^{+\infty} f$ converge.

1. Montrer, si $x \in \mathbb{R}^+$, la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^x}\mathrm{d}t$, dont on note $F(x)$ la valeur.
2. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 16 ***(Mines MP 2021)***

Soit $f \in \mathscr{C}^0(]0,1], \mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_0^1 f^2(t)\mathrm{d}t$ convergent et telle que : $\forall x \in [0,1]$, $\frac{1}{2}\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2$. On note F la fonction définie sur $[0,1]$ par : $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. Montrer que F est de classe C^1 sur $[0,1]$. Trouver une équation différentielle vérifiée par F. En déduire f.

Exercice 17 ***(Mines MP 2021)***

Déterminer un équivalent de $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}}|\cos t|\mathrm{d}t$.

SOLUTIONS