5 Intégration sur un segment

I. Propriétés générales

L'essentiel

- → construction de l'intégrale sur un segment pour une fonction en escalier, extension aux fonctions continues par morceaux
- → notation $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ et relation de Chasles
- → propriétés : linéarité, positivité et croissance
- → si f est **continue, positive** sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = 0$ si et seulement si $f=0$
- → inégalité triangulaire pour une fonction continue par morceaux
- → cas d'égalité de l'inégalité triangulaire pour une fonction **continue** : de signe constant pour une fonction à valeurs réelles, d'argument constant pour une fonction à valeurs complexes
- → inégalité de Cauchy-Schwarz (continue par morceaux), cas d'égalité

L'essentiel - sommes de Riemann

- → Si f est continue par morceaux sur le **segment** $[a,b]$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)=\int_a^b f(t)\,dt$
- → on peut toujours se ramener à $[0,1]$: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(t)\,dt.$
- → on peut supprimer/ajouter un nombre fini fixe d'indices dans la somme (commencer à 1, finir à $n\dots$)

L'essentiel - théorèmes d'approximation

- → si f est une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$, alors, pour tout $\varepsilon>0$, il existe φ en escalier telle que $\|f-\varphi\|_\infty<\varepsilon$.
- → si f est une fonction continue sur $[a,b]$, alors, pour tout $\varepsilon>0$, il existe une fonction polynomiale P telle que $\|f-P\|_\infty<\varepsilon$.

II. Primitives

Théorème 2 *(théorème fondamental sur les primitives)*

Soit f une fonction continue (par morceaux) sur un intervalle I et $a\in I$. La fonction $F : x\mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a

L'essentiel - primitives

- → On appelle primitive d'une fonction continue f sur I toute fonction F de classe $\mathscr{C}^1$ sur I telle que $F'=f$.
- → existence : $F : x\mapsto\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a,
- → si f est continue sur I et F une primitive de f sur I, alors pour tout $a,b\in I$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt=F(b)-F(a)$,
- → si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $a\in I$, pour tout $x\in I$, $f(x)=f(a)+\displaystyle\int_a^x f'(t)\,dt$.

III. CALCULS

RÉSULTATS GÉNÉRAUX

L'ESSENTIEL

- Intégration par parties : si f, g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur un segment $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,dt = \left[f(t)g(t)\right]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,dt.$$

- Intégration par parties généralisée : si f, g sont de classe $\mathscr{C}^n$ sur un segment $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(t)g^{(n)}(t)\,dt = \left[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k f^{(k)}(t)g^{(n-1-k)}(t)\right]_a^b + (-1)^n \int_a^b f^{(n)}(t)g(t)\,dt.$$

- Changement de variable : soit f **continue** sur un intervalle I, et φ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un segment $[\alpha, \beta]$ à valeurs dans I, on a

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx.$$

- Changement de variable bijectif : soit f **continue par morceaux** sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, et φ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ d'un intervalle I sur un intervalle J contenant $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx.$$

L'ESSENTIEL - FORMULES DE TAYLOR

Soit $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$. Si $a \in I$, alors pour tout $x \in I$,

- $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x)$, avec $R_n(x) = \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt$ (appelé reste-intégrale),
- si $|f^{(n+1)}|$ est bornée par M_{n+1} sur I, alors on obtient la majoration $|R_n(x)| \leqslant M_{n+1}\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$.
- *Inégalité de Taylor-Lagrange* : si $|f^{(n+1)}|$ est bornée par M_{n+1} sur $[a, b]$, alors

$$\left|f(b) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right| \leqslant M_{n+1}\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

- soit f de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et $a \in I$. Il existe une fonction ε, définie sur I, telle que

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + (x-a)^n\varepsilon(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a}\varepsilon(x) = 0.$$

L'ESSENTIEL - SYMÉTRIES, PÉRIODICITÉ

Si f est une fonction continue par morceaux, alors

- si f est *paire* sur $[-a, a]$, alors $\int_{-a}^a f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt$,
- si f est *impaire* sur $[-a, a]$, alors $\int_{-a}^a f(t)\,dt = 0$,
- si f est de période T, alors pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a
  - $\int_a^b f(t)\,dt = \int_{a+T}^{b+T} f(t)\,dt$ (périodicité),
  - $\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_b^{b+T} f(t)\,dt$ (l'intégrale sur une période ne dépend pas du point de départ).

IV. EXERCICES

Exercice 1

Déterminer les fonctions continues de $[0,1]$ dans lui-même qui vérifient $\int_0^1 f^2(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt$.

Exercice 2

Déterminer les limites des suites suivantes lorsque n tend vers $+\infty$:

a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$ b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$ c) $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ d) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}$ e) $\frac{1}{n^{3/2}}\sum_{k=1}^{n} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$

Exercice 3

1. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\int_0^\pi x f(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x = \pi \int_0^{\pi/2} f(\sin x)\mathrm{d}x$.
2. En déduire la valeur de $\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

Exercice 4

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x}\,dx$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n \tan x\,dx$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n \tan x\,dx$

Exercice 5

Soit $I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,dx$.

1. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 1$
2. Montrer que $I_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + o(\frac{1}{n})$.

Exercice 6

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. On définit F pour $x \in [0,1]$ par $F(x) = \int_0^1 \min(x,t) f(t)\,dt$. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$ et déterminer F''. En déduire que pour tout $x\in[0,1]$, on a

$$F(x) = \int_0^x \left(\int_u^1 f(t)\,dt\right) du.$$

Exercice 7

On pose, pour $x\in\mathbb{R}$, $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$.

1. Étudier la fonction f.
2. Donner un équivalent simple de f en 0.
3. Comparer $f(x)$ et $f(\frac{1}{2x})$ et en déduire un équivalent simple de f en $+\infty$.

Exercice 8

Étudier la fonction g définie par $x \mapsto \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$. Montrer qu'on peut la prolonger par continuité en 0. Déterminer un équivalent de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 9 *(Mines-Ponts)*

Soit $F : x \mapsto \int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\,dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\,dt$. Déterminer l'ensemble de définition de F, et montrer que F est constante. En déduire la valeur de $\int_0^1 \arcsin\sqrt{t}\,dt$.

Exercice 10

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $a < b$ deux réels. Montrer $x \mapsto \int_a^b f(x+t)\cos t\,dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11

Déterminer un équivalent, lorsque n tend vers $+\infty$, de $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-n/k}}{k^2}$.

Exercice 12

1. Montrer que pour $x > -\frac{1}{2}$, on a $x - x^2 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.
2. Soit f continue sur $[0,1]$ et x réel. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{n} f(\frac{k}{n})\right)$.
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{k+n}\right)$.

Exercice 13 *(important)*

Soit f continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique. Relier $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$ à $\int_0^T f(t)\,dt$

Exercice 14

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue non nulle telle que pour tout $k \in [\![0\,;n-1]\!]$, $\int_a^b t^k f(t)\,dt = 0$. Montrer que f change au moins n fois de signe sur $]a,b[$.

Exercice 15

Soit $a < b$ et $\varphi \in \mathscr{C}^2([a,b],\mathbb{R})$ telle que $|\varphi'| \geqslant 1$ et φ' monotone. Montrer que, pour tout $\lambda > 0$, $\left|\int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)}\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{4}{\lambda}$.

Exercice 16

Déterminer la limite de $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \sin^2 \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Exercice 17

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue non nulle (avec $a < b$). On note M le maximum de f sur $[a,b]$.

1. Montrer que, pour tout $\varepsilon \in]0,M[$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\int_a^b f(t)^n\,dt \geqslant \alpha(M-\varepsilon)^n.$$
2. Déterminer la limite, si elle existe, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f(t)^n\,dt\right)^{1/n}$.

Exercice 18 *(Centrale MP)* ✰

Soit $a \in]0,1]$. Déterminer les fonctions $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^{ax} f$.

Exercice 19 ***(Théorème de relèvement)*** ☆

1. Soit $f : I \to \mathbb{C}^*$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Justifier l'existence d'une fonction $g : I \to \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f = \exp\circ g$ (faire apparaître une équation différentielle vérifiée par g).
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ de période 2π. Montrer que $\frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt \in \mathbb{Z}$.

Exercice 20 ***(Mines MP 2016)*** ☆

1. Soit$u \in \mathbb{R}$, déterminer $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_0^u |\sin(\lambda t)|\,dt$. Puis, pour $\alpha, \beta > 0$, $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_\alpha^\beta |\sin(\lambda t)|\,dt$.
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. Déterminer $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(t)\,|\sin(\lambda t)|\,dt$.

Exercice 21 ☆☆

Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{K})$. On note, pour $q \in]0,1[$, $J(q) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} q^n f(q^n)$.

1. Justifier l'existence de $I(q)$.
2. Montrer que $\lim\limits_{q\to1^+}(1-q)J(q) = \int_0^1 f(t)\,dt$.

EXERCICES EN VRAC

Exercice 22 ***(Polytechnique 2022)***

On se donne des réels $\xi_n > \xi_{n-1} > \cdots > \xi_1 > 0$ et des réels non nuls $a_1, \ldots, a_n$. On pose $f : t \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \sin(\xi_k t)$. On suppose que la suite $\left(\left\|f^{(N)}\right\|_\infty\right)_{N\in\mathbb{N}}$ est bornée, que $f'(0) = 1$ et que $\|f\|_\infty \leqslant 1$. On se propose de montrer que $f = \sin$.

1. Montrer que $\xi_n \leqslant 1$.
2. On pose $g = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{[-\xi_k,\xi_k]}$. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $\frac{f(t)}{t} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} g(x)e^{itx}\mathrm{d}x$.
3. On admet que, pour toute fonction $\varphi : [-1,1] \to \mathbb{C}$ continue par morceaux, on a $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}|\varphi|^2 = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(n)|^2$ où $\widehat{\varphi}(n) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\varphi(x)e^{-in\pi x}\mathrm{d}x$.

   On admet que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer que $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}|g|^2 \leqslant 1$
4. Conclure.

Exercice 23 ***(Mines MP 2021)***

Soit E l'ensemble des fonctions $f \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ telles que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer que, pour toute $f \in E$, $\int_0^1 \left|f' - f\right| \geqslant e^{-1}$. La constante e^{-1} est-elle optimale ?

Exercice 24 ***(Mines MP 2021)***

Soient $n \geqslant 2$ et $x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \ldots < x_n < y_n$ des réels.

1. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que, pour tout $i = 1, \ldots, n$, $\int_{x_i}^{y_i} P = 0$. Montrer que P est nul.
2. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$, non nul, tel que $\int_{x_i}^{y_i} P = 0$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$.