4 NORMES, SUITES

I. NORMES

DÉFINITIONS

Définition 2 *(Norme)*

on appelle norme sur E une application :
- → $N : E \to \mathbb{R}^+$ (existence et positivité),
- → $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ (définie),
- → $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (homogénéité),
- → $N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire).

On notera $\|.\|$ à la place de N.

Proposition 6 *(Différentes normes)*

- → **norme euclidienne** : si $<.,.>$ est un produit scalaire sur E, alors l'application $x \mapsto \sqrt{<x,x>}$ est une norme. Une norme provenant d'un produit scalaire est appelée *norme euclidienne*.
- → **norme induite** : si F est un sev de E, l'application $x \mapsto \|x\|_E$ définit une norme sur F, appelée norme induite sur F.
- → **norme produit** : si $(E_i, N_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ sont des $\mathbb{K}$-ev, on munit $E = E_1 \times \ldots \times E_p$ d'une norme par

$$\|(x_1, \ldots, x_p)\| = \sup_{i \in [\![1\,;p]\!]} N_i(x_i).$$

Définition 3 *(Boules)*

- → boule ouvert de centre a, de rayon r : $B(a,r) = \{x \in E, \|x-a\| < r\}$
- → boule fermé de centre a, de rayon r : $\overline{B}(a,r) = \{x \in E, \|x-a\| \leqslant r\}$
- → sphère de centre a, de rayon r : $S(a,r) = \{x \in E, \|x-a\| = r\}$

On obtient ces boules à partir des boules $B(0,1)$ et $\overline{B}(0,1)$ par translation et homothétie. Les boules sont convexes.

Définition 4 *(Algèbre normée)*

on dit qu'une algèbre $(E, \|.\|)$ est une algèbre normée, lorsque $(E, \|.\|)$ est un evn et que la norme vérifie $\|x.y\| \leqslant \|x\|.\|y\|$ pour tout $x, y \in E$. On dit que c'est une algèbre normée unitaire si, de plus, $\|1_E\| = 1$.

Définition 5 *(Parties bornées)*

- → une partie A de E est bornée lorsqu'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $a \in A$, $\|a\| \leqslant M$. Une partie A est bornée si et seulement si elle est contenue dans une boule.
- → une application f de X dans $(A, \|.\|)$ est bornée lorsque $f(X)$ est une partie bornée de E (il existe M tel que pour tout $x \in X$, $\|f(x)\| \leqslant M$).

Définition 6 *(Applications lipschitziennes)*

- → Soit $f : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$. Elle est K-lipschiztienne lorsque, pour tout $x, y \in E$, $\|f(x) - f(y)\|_F \leqslant K \|x-y\|_E$.
- → L'ensemble des applications K-lipschitiennes n'est pas un espace vectoriel, celui des applications lipschitziennes en est un.

DISTANCE

Proposition 7 *(Distances)*

- → **distance associée à une norme** : l'application $(x,y) \mapsto \|x-y\|$ est une distance sur E, appelée distance associée à la norme $\|.\|$.
- → **distance à une partie** : si $A \subset E$ non vide, on peut définir la distance à A par

$$d(x,A) = \inf_{a \in A} \|x-a\|.$$

Cette distance est 1-lipschitzienne : $|d(x,A) - d(y,A)| \leqslant \|x-y\|$.

II. SUITES

LIMITE

Définition 7 *(Limite)*

une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in E$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \|u_n - \ell\| < \varepsilon.$$

Si la limite existe, elle est unique. Une suite convergente est bornée. On dispose des opérations usuelles sur les limites (combinaison linéaire, produit dans une algèbre normée). Dans un espace produit muni de la norme infinie produit, une suite converge si, et seulement si chaque suite composante converge.

Définition 8 *(densité)*

On dit qu'une partie X est dense dans une partie A si tout élément de A est limite d'une suite d'élements de X.

NORMES ÉQUIVALENTES

Définition 9

domination, équivalence soit N_1 et N_2 deux normes sur E. On dit que
- → N_1 domine N_2 lorsqu'il existe $\alpha > 0$ tel que $N_2 \leqslant \alpha N_1$.
- → N_1 et N_2 sont équivalentes lorsqu'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que

$$\beta N_1 \leqslant N_2 \leqslant \alpha N_1.$$

MÉTHODE - NON-ÉQUIVALENCE

pour prouver qu'une norme N_1 n'est pas dominée par N_2, on essaie de construire une suite de vecteurs telle que $\frac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)}$ est de limite infinie - pour cela on peut essayer de construire une suite de vecteurs unitaires pour l'une des normes (et de limite nulle ou infinie - suivant le sens - pour les normes de l'autre).

Propriété 8

- → N_1 domine N_2 si et seulement si toute suite convergente pour N_1 converge pour N_2 (et vers la même limite).
- → deux normes sont équivalentes si et seulement si elles ont exactement les mêmes suites convergentes.

Théorème 1 *(dimension finie)*

- → si E est un espace vectoriel de dimension finie, alors toutes les normes sur E sont équivalentes.
- → si $\{e_1, \ldots, e_p\}$ est une base de l'evn de dimension finie E, on peut écrire, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=1}^{p} u_n^{(k)} e_k$. Si $\ell = \sum_{k=1}^{p} \ell_k e_k$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n^{(k)} = \ell_k \text{ pour tout } k \in [\![1\,;p]\!].$$

VALEURS D'ADHÉRENCE

Définition 10 *(Valeur d'adhérence)*

on dit que ℓ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsqu'il existe une suite extraite qui converge vers ℓ.

Proposition 9 *(lien avec la limite)*

soit (u_n) une suite de E.
- → si (u_n) converge vers ℓ, alors la suite n'admet qu'une valeur d'adhérence ℓ - si une suite admet deux valeurs d'adhérence, elle diverge.
- → une suite n'admettant qu'une seule valeur d'adhérence n'est pas forcément convergente.
- → une suite de réels ou de complexes bornée admet une valeur d'adhérence (th. de Bolzano-Weierstrass).

III. EXERCICES

NORMES, NORMES ÉQUIVALENTES

Exercice 1

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On définit l'application

$$P \mapsto \|P\| = \sup_{t\in[0,1]} |P(t) - P'(t)|$$

Montrer que $\|.\|$ est une norme sur E.

Exercice 2

Montrer que l'application $A \mapsto \left(\operatorname{tr}({}^tA.A)\right)^{1/2}$ est une norme sur $M_n(\mathbb{R})$ et qu'elle vérifie $\|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$ (on dit que c'est une norme matricielle).

Exercice 3

Soit $E = \mathbb{R}^2$. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on considère :

$$N((x, y)) = \sup_{t\in[0,1]} |x + t y|.$$

1. Montrer que N est bien une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Dessiner la boule unité pour cette norme.
3. Trouver le meilleure encadrement possible avec les trois normes habituelles sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4

Soit $E = \{f \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R}\}$. On pose pour tout $f \in E$,

$$N(f) = \sqrt{\left|f(0)\right|^2 + \int_0^1 \left|f'(t)\right|^2 dt}.$$

1. Montrer que N est une norme euclidienne sur E.
2. Etablir que pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty \leqslant \sqrt{2}N(f)$.
3. Montrer que les normes $\|.\|_\infty$ et N ne sont pas équivalentes (on pourra utiliser la suite (f_n) où $f_n(x) = x^n$).

Exercice 5

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $(x_0,\ldots,x_p)$ des réels deux à deux distincts. On pose, pour $Q \in E$

$$N(Q) = \sum_{k=0}^{p} |Q(x_k)|$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que N soit une norme.

Exercice 6

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Soient N_1 et N_2 deux normes sur E et B_1 et B_2 les boules ouvertes unité pour N_1 et N_2. Montrer que si $B_1 = B_2$ alors $N_1 = N_2$.

Exercice 7 *(IMT MP 2019)*

Pour $f \in E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, soit $N(f) = \sup\left\{\left|\int_0^1 f(t)t^n \mathrm{d}t\right| ; n \in \mathbb{N}\right\}$. Montrer que N est une norme sur $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

Exercice 8

Soit $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée et telle que $u_0 = 0\}$. On définit

$$\begin{cases} N_\infty(u) &= \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n| \\ N(u) &= \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n| \end{cases}$$

1. Montrer qu'on obtient bien deux normes.
2. Montrer que $N \leqslant 2N_\infty$ et que la majoration est optimale.
3. Montrer que les normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 9 ***(normes p)***

Soit $E=\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{C})$. Soit $p\in]1,+\infty[$ et q le réel tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

1. Montrer que pour tout $\alpha,\beta\geqslant 0$, on a $\alpha\beta\leqslant\frac{\alpha^p}{p}+\frac{\beta^q}{q}$.
2. En déduire l'inégalité de Hölder : pour tout $f,g\in E$,
$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right|\leqslant\left(\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}\left(\int_a^b |g(t)|^q\,dt\right)^{1/q}.$$
On commencera par le montrer dans le cas où $\int_a^b |f(t)|^p\,dt=1=\int_a^b |g(t)|^q\,dt$.
3. En utilisant $|f+g|^p=|f+g|^{p-1}.|f+g|$, montrer que, pour $f,g\in E$, on a
$$\left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{1/p}\leqslant\left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p}+\left(\int_a^b |g|^p\right)^{1/p}.$$
En déduire que $f\mapsto\left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p}$ est une norme sur E.

SUITES NUMÉRIQUES

Exercice 10

Soit z une suite définie par un premier terme $z_0\in\mathbb{C}$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$z_{n+1}=\frac{z_n+|z_n|}{2}.$$
Montrer que (z_n) converge et déterminer sa limite en fonction du module et d'un argument de z_0.

Exercice 11

On considère l'équation $P_n(x)=x^n+x-1=0$.

1. Montrer qu'elle possède une unique solution positive. On l'appelle x_n.
2. Montrer que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 12 ***(Suite de Fibonacci)***

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=u_1=1$ et
$$\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2}=u_{n+1}+u_n.$$

1. Montrer les relations suivantes, pour $n\geqslant 1$,
   (a) $u_0+u_1+\cdots+u_n=u_{n+2}-1$.
   (b) $u_0^2+u_1^2+\cdots+u_n^2=u_nu_{n+1}$
   (c) $u_n^2-u_{n-1}u_{n+1}=(-1)^n$
2. Déterminer la valeur de u_n en fonction de n.
3. Donner la limite de u_{n+1}/u_n.
4. Soit $\alpha>0$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0=v_1=1$ et
$$\forall n\in\mathbb{N}, v_{n+2}=v_{n+1}^\alpha+v_n^\alpha.$$
   (a) Montrer que v_n est croissante.
   (b) Donner une relation vérifiée par une (la) limite éventuelle ℓ de v_n
   (c) Montrer que si $\alpha\in]0,1[$, alors v_n est majorée par ℓ et conclure.
   (d) Montrer que si $\alpha>1$, alors v_n est minorée par ℓ et conclure.

Exercice 13

Montrer l'existence et l'unicité d'une suite de réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $e^{x_n}+x_n=n$. Donner un développement asymptotique à trois termes de cette suite.

Exercice 14 ***(Suites définies par récurrence)***

Étudier les suites définies par

1. $u_0 \in \mathbb{R}, u_{n+1} = \sin u_n$
2. $u_0 \in \mathbb{R}, u_{n+1} = \sqrt{4+3u_n}$
3. $u_0 \in \mathbb{R}, u_{n+1} = u_n - u_n^2$

Exercice 15 ***(Quelques résultats de densité)***

1. Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à 0.
   (a) Justifier l'existence de $a = \inf\{g \in G, g > 0\}$.
   (b) *Premier cas :* on suppose $a > 0$. Montrer que $a \in G$, puis que $G = a.\mathbb{Z}$.
   (c) *Second cas :* on suppose que $a = 0$. Montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.
2. Application : soit θ un réel tel que $\theta/\pi \notin \mathbb{Q}$. Montrer que la suite $(\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{Z}}$ est dense dans $[-1, 1]$.
3. (a) Soit u et v deux suites réelles qui divergent vers $+\infty$ et telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = 0$. Montrer que $H = \{u_n - v_p, (n, p) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que la suite $(\sin(\pi\sqrt{n}))$ est dense dans $[-1, 1]$.

EXERCICES EN VRAC

Exercice 16 ***(Centrale MP 2021)***

Soit $n \geqslant 3$. On pose $F_n = X^n - nX + 1$.

1. Montrer que F_n admet exactement deux racines $x_n < y_n$ dans $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Montrer que (x_n) est décroissante, tend vers 0 et vérifie $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
3. Donner un équivalent de $x_n - \dfrac{1}{n}$.

Exercice 17 ***(Mines MP 2021)***

Soit $E = \left\{f \in \mathscr{C}^2([0,1], \mathbb{R}), f(0) = f'(0) = 0\right\}$. Si $f \in E$, on pose $N(f) = \left\|f + 2f' + f''\right\|_\infty$.

1. Montrer que N est une norme sur E.
2. On fixe $f \in E$ et on pose $g = f + 2f' + f''$. Exprimer f en fonction de g (*indication* : considérer $h : t \mapsto f(t)e^t$).
3. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}^+$ tel que, pour tout $f \in E$, $\left\|f\right\|_\infty \leqslant aN(f)$.
4. Les normes $\| \ \|_\infty$ et N sont-elles équivalentes ?

Exercice 18 ***(Mines MP 2022)***

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto nx^{n+1} - (n+1)x^n$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ possède une unique solution x_n dans $\mathbb{R}_+$.
2. Calculer $f_n\left(1 + \frac{2}{n}\right)$. Montrer que la suite (x_n) est convergente et trouver sa limite.
3. On pose $u_n = n(x_n - 1)$ et $h : x \to e^x(x-1)$. Montrer que $h(u_n) \underset{n\to+\infty}{\to} 1$.
4. Montrer que $x_n = 1 + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, où α désigne la solution de l'équation $h(x) = 1$.

Exercice 19 ***(Mines MP 2021)***

1. Soit $u \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$ telle que $u_n \to \ell \in \mathbb{C}$. Montrer que $\dfrac{1}{n}(u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}) \to \ell$.
   Soient $a > 0, \alpha > 1, \lambda \neq 0$ et $f \in \mathscr{C}^0([0,a],[0,a])$. On suppose que $f(x) = x - \lambda x^\alpha + o\left(x^\alpha\right)$ lorsque $x \to 0$.
2. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que 0 soit le seul point fixe de f sur $[0, \varepsilon]$.
3. On suppose que $u_0 \in [0, \varepsilon]$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que $u_n \to 0$.
4. Donner un équivalent en 0 de $f(x)^{1-\alpha} - x^{1-\alpha}$.
5. Donner un équivalent de u_n.
6. Appliquer 5. à $f = \sin$ et à $f : x \mapsto \ln(1+x)$.

Exercice 20 ***(Mines MP 2021)***

Soit $E = \mathbb{C}[X]$. Pour $Q \in E\backslash\{0\}$ et $P \in E$, soit $N_Q(P) = \|PQ\|_{\infty,[-1,1]}$.

1. Montrer que, si $Q \in E\backslash\{0\}$, N_Q est une norme sur E.
2. Soit $Q \in E\backslash\{0\}$. Les normes N_Q et N_1 (celle pour $Q = 1$) sont-elles équivalentes ?

Exercice 21 ***(limsup, liminf et applications)*** ✰

Soit (u_n) une suite de réels. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \sup\limits_{k\geqslant n} u_k$ et $V_n = \inf\limits_{k\geqslant n} u_k$ (ces valeurs sont éventuellement $\pm\infty$)

1. Lorsque u n'est pas majorée, que peut-on dire sur la suite (U_n) ?
2. On suppose que la suite u est bornée.
   (a) Justifier que les deux suites admettent des limites finies qu'on notera limsup $u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ (une autre notation fréquente est $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, u_n$) et liminf $u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ (ou également $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, u_n$)
   (b) Soient u et v deux suites bornées de réels. On suppose qu'il existe n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant v_n$. Quel peut-on dire de limsup u_n et liminf v_n ?
   (c) Soit φ une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Justifier que liminf $u_n \leqslant \varphi \leqslant$ limsup u_n.
   (d) Justifier que la suite u converge vers ℓ si et seulement si limsup $u_n =$ liminf $u_n = \ell$.
   (e) Justifier que limsup u_n est la plus grande valeur d'adhérence de la suite u (de même liminf u_n est la plus petite).
3. On dit qu'une suite u est *sous-additive* lorsque, pour tout $m, n \in \mathbb{N}$, $u_{m+n} \leqslant u_n + u_m$ (elle n'est plus forcément bornée).
   (a) Soit $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \geqslant 2n$. On note q le quotient et r le reste de la division euclidienne de m par n. Justifier que $u_m \leqslant (q-1)u_n + u_{n+r}$.
   (b) En déduire que $\left(\frac{u_m}{m}\right)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est bornée et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, limsup $\frac{u_m}{m} \leqslant \frac{u_n}{n}$.
   (c) En déduire que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ converge.
4. d'après *X 2021* : Un n-chemin dans $\mathbb{Z}^2$ est une $(n+1)$-liste $(x_0, \dots, x_n)$ d'éléments de $\mathbb{Z}^2$ telle que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\left\|x_{k+1} - x_k\right\|_1 = 1$. Un tel chemin est dit simple lorsque ses éléments sont distincts. On note A_n le nombre de n-chemins simples partant de $(0,0)$. Montrer qu'il existe un réel $\gamma \in [2,4]$ tel que, pour tout $t > \gamma$, $A_n = \mathrm{o}\left(t^n\right)$ et, pour tout $t \in [0, \gamma[$, $t^n = o(A_n)$.