3 Calcul d'intégrales

I. Calculs

Résultats généraux

L'essentiel

→ Intégration par parties : si f, g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur un segment $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,dt.$$

→ Intégration par parties généralisée : si f, g sont de classe $\mathscr{C}^n$ sur un segment $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(t)g^{(n)}(t)\,dt = \left[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k f^{(k)}(t)g^{(n-1-k)}(t)\right]_a^b + (-1)^n \int_a^b f^{(n)}(t)g(t)\,dt.$$

→ Changement de variable : soit f continue sur un intervalle I, et φ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un segment $[\alpha, \beta]$ **à valeurs dans** I, on a

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx.$$

→ Changement de variable bijectif : soit f continue sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, et φ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ d'un intervalle I sur un intervalle J contenant $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx.$$

L'essentiel - symétries, périodicité

Si f est une fonction continue par morceaux, alors

→ si f est *paire* sur $[-a, a]$, alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt$,

→ si f est *impaire* sur $[-a, a]$, alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\,dt = 0$,

→ si f est de période T, alors pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a

- $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_{a+T}^{b+T} f(t)\,dt$ (périodicité),
- $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_b^{b+T} f(t)\,dt$ (l'intégrale sur une période ne dépend pas du point de départ).

Méthodes de calculs

Méthode - Fractions rationnelles

On décompose la fraction rationelle en éléments simples et on calcule les intégrales de chacun des termes

→ Une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{(t-a)^n}$ sur $]-\infty, a[$ ou $]a, +\infty[$ est la fonction

$$t \mapsto \begin{cases} -\dfrac{1}{n-1}\dfrac{1}{(t-a)^{n-1}} & \text{si } n \neq 1, \\ \ln|t-a| & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

→ Pour les fonctions à intégrer sous la forme $t \mapsto \dfrac{1}{(at^2+bt+c)^n}$ (qui ne se factorise pas sur $\mathbb{R}$), on commence par effectuer un mise sous forme canonique afin de se ramener à des primitives de fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{(t^2+1)^n}$. Une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t^2+1}$ est $t \mapsto \arctan t$. Lorsque $n \geqslant 2$, on cherche, à l'aide d'une intégration par parties, une relation entre I_n et I_{n+1} où I_n est une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{(t^2+1)^n}$

MÉTHODE - POLYNÔMES TRIGONOMÉTRIQUES

On doit chercher des primitives $\int \sin^n t \cos^m t \, dt$.

→ Par primitive directe : si l'un des exposants est impair, on peut faire apparaître des termes sous la forme $u' u^n$. Par exemple, si $m = 2p+1$, on écrit

$$\sin^n t \cos^m t = \sin^n t (\cos^{2p} t) \cos t = \left(\sin^n t (1-\sin^2 t)^p\right) \cos t.$$

En développant le terme à la puissance p, on fait apparaître une combinaison de termes sous la forme $\sin^q t \cos t$ qui s'intègrent facilement.

→ Par linéarisation : (dans le cas m et n pairs) en utilisant les formules de trigonométrie ou les formules d'Euler.

MÉTHODE - POLYNÔMES ET EXPONENTIELLES

On cherche des primitives de fonctions $t \mapsto P(t)e^{\alpha t}$ où P est un polynôme de degré n et α un réel ou un complexe non nul (cela permet de traiter le cas des fonctions sinus et cosinus). Une telle primitive est de la forme $t \mapsto Q(t)e^{\alpha t}$ où Q est un polynôme de degré n. On détermine cette primitive en dérivant $t \mapsto Q(t)e^{\alpha t}$ puis en identifiant les coefficients du polynôme en facteur de $e^{\alpha t}$ dans cette dérivée avec ceux de P.

MÉTHODE - FRACTIONS $F(\sin x, \cos x)$

→ on peut utiliser le changement de variable $t = \tan(x/2)$ combiné aux formules

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

→ règles de Bioche : si la quantité $F(\sin x, \cos x)\, dx$ est invariante (ne pas oublier le « dx ») lorsqu'on remplace
- x par $-x$: $u = \cos x$
- x par $\pi - x$: $u = \sin x$
- x par $x + \pi$: $u = \tan x$.

MÉTHODE - FRACTIONS $F(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$

Après mise sous forme canonique de ax^2+bx+c et après un changement de variable affine, on se trouve dans l'une des situations suivantes (le but est de transformer à l'aide des formules de trigonométries la partie sous la racine en un carré) :

→ $\int G(u, \sqrt{1-u^2})\, du$: on utilise le changement de variable $u = \sin t$ ou $u = \cos t$.

→ $\int G(u, \sqrt{u^2-1})\, du$: on utilise le changement de variable $u = \operatorname{ch} t$ (alors $\sqrt{u^2-1} = \pm \operatorname{sh} t$) ou $u = \frac{1}{\cos t}$ (alors $\sqrt{u^2-1} = \pm \tan t$).

→ $\int G(u, \sqrt{u^2+1})\, du$: on utilise le changement de variable $u = \operatorname{sh} t$ (alors $\sqrt{u^2+1} = \pm \operatorname{ch} t$).

II. EXERCICES

Exercice 1

Calculer les primitives des fonctions suivantes suivantes sur les intervalles (que l'on précisera) où elles sont continues

a) $x \mapsto x \arctan x$
b) $x \mapsto x(\arctan x)^2$
c) $x \mapsto \sin^2 x \cos^3 x$
d) $x \mapsto \dfrac{1}{3e^x + 2e^{-x}}$
e) $x \mapsto e^x(2x^2+x+1)$
f) $x \mapsto e^{3x}(\cos x + 2\sin x)$
g) $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^2)^2}$
h) $x \mapsto \operatorname{ch} x \sin 2x$
i) $x \mapsto \dfrac{1}{x+\sqrt{x}}$
j) $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$
k) $x \mapsto \dfrac{1}{(x+2)(x^2+2x+5)}$
l) $x \mapsto \dfrac{x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ (avec $a^2 \neq b^2$)
m) $x \mapsto \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-5x+6}}$

Exercice 2

Déterminer la valeur des intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^{1/2} \arctan\sqrt{1-x^2}\, dx$
b) $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^2)\, dx$
c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$
d) $\displaystyle\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}\, dx$

Exercice 3

Calculer les primitives de $x \mapsto \dfrac{\ln\left(x^2+4x+5\right)}{(1+x)^2}$.

Exercice 4

Calculer la valeur de $\displaystyle\int_0^{1/2} \arctan\sqrt{1-x^2}\,dx$

Exercice 5

Calculer, pour $x \in \mathbb{R}$, $I(x) = \displaystyle\int_0^1 \min(x,t)\,dt$.