2 Décomposition en éléments simples

I. Généralités

Factorisation d'un polynôme

Proposition 3 *(Factorisations de polynômes dans $\mathbb{C}[X]$)*

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré $n \geqslant 1$. Alors P se factorise de façon unique sous la forme

$$P = \lambda(X-a_1)^{\alpha_1}\cdots(X-a_p)^{\alpha_p},$$

où les complexes $a_1, \cdots, a_p$ sont deux à deux distincts et les exposants $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ sont des entiers naturels non nuls (tels que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_p = n$).

Proposition 4 *(Factorisations de polynômes dans $\mathbb{R}[X]$)*

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré $n \geqslant 1$. Alors P se factorise de façon unique sous la forme

$$P = \lambda(X-a_1)^{\alpha_1}\cdots(X-a_p)^{\alpha_p}(X^2-s_1X+p_1)^{\beta_1}\cdots(X^2-s_qX+p_q)^{\beta_q},$$

où

- → les <u>**réels**</u> $a_1, \cdots, a_p$ sont deux à deux distincts.
- → les facteurs <u>**réels**</u> $X^2 - s_kX + p_k$ sont deux à deux distincts avec $s_k^2 - 4p_k < 0$ pour $k \in [\![1;q]\!]$ (les facteurs sont irréductibles sur $\mathbb{R}$).
- → les exposants $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ et $\beta_1, \cdots, \beta_q$ sont des entiers naturels non nuls.

Remarque : les facteurs du second degré correspondent au produit de deux facteurs conjugués $(X-z)(X-\bar{z})$.

Partie entière

Définition 1 *(partie entière)*

Soit A/B une fraction irréductible. On rappelle que la division euclidienne de A par B s'écrit $A = BQ + R$ avec $\deg R < \deg B$. On appelle alors partie entière de la fraction rationnelle A/B le polynôme Q. On a alors l'écriture $\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}$. On peut alors se ramener à l'étude de la décomposition d'une fraction sous la forme A/B avec $\deg A < \deg B$.

⚠ **Attention**

Très important Tout ce qui suit sur les décompositions suppose que le numérateur est de degré strictement inférieur à celui du dénominateur. La forme de la décomposition sera fausse si on ne se trouve pas dans cette situation. Il **faudra** donc systématiquement commencer par s'y ramener.

Décomposition en éléments simples - cas complexe

Proposition 5

On considère une fraction rationnelle irréductible $F = A/B$ avec $\deg A < \deg B$. On factorise B sous la forme

$$B = \lambda(X-a_1)^{\alpha_1}\cdots(X-a_p)^{\alpha_p}.$$

Il existe alors des complexes c_{ij} (uniques) tels que

$$F = \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{\alpha_i}\frac{c_{ij}}{(X-a_i)^j}\right).$$

En d'autres termes on décompose la fraction en fractions plus simples. Pour chaque facteur $(X-a)^\alpha$ qui apparaît dans la factorisation de B, on voit apparaître les fractions $\frac{1}{X-a}, \frac{1}{(X-a)^2}, \cdots, \frac{1}{(X-a)^\alpha}$ dans la décomposition. Il n'y a plus qu'à déterminer les constantes devant ces fractions.

DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES - CAS RÉEL

Le théorème est assez proche mais un peu plus compliqué. Avec les mêmes hypothèses, B se factorise dans $\mathbb{R}[X]$ sous la forme

$$B = \lambda(X-a_1)^{\alpha_1}\cdots(X-a_p)^{\alpha_p}(X^2+b_1X+c_1)^{\beta_1}\cdots(X^2+b_qX+c_q)^{\beta_q},$$

→ pour chaque facteur $(X-a)^\alpha$, on écrit dans la décomposition les fractions

$$\frac{c_1}{X-a}, \frac{c_2}{(X-a)^2}, \dots, \frac{c_\alpha}{(X-a)^\alpha},$$

où c_i est un réel.

→ pour chaque facteur $(X^2+bX+c)^\beta$ (irréductible dans $\mathbb{R}$), on fait apparaître les fractions

$$\frac{c_1X+d_1}{X^2+bX+c}, \frac{c_2X+d_2}{(X^2+bX+c)^2}, \dots, \frac{c_\beta X+d_\beta}{(X^2+bX+c)^\beta},$$

où les constantes c_k et d_k sont réelles.

II. TECHNIQUES DE DÉCOMPOSITION

On se donne une fraction rationnelle irréductible $F = A/B$ et on cherche sa décomposition en éléments simples. On n'oubliera pas de vérifier que $\deg A < \deg B$ et si ce n'est pas le cas, on commencera par effectuer la division euclidienne de A par B pour s'y ramener. On supposera être dans ce cas dans la suite de ce chapitre.

CAS RÉEL

Pour une décomposition avec des facteurs réels irréductibles de degré 2 au dénominateur, de multiplicité 1, on a le choix entre chercher directement la décomposition en réel et la faire en complexe puis regrouper les termes conjugués (cela ne fonctionne pas si les exposants sont plus grand que 1).

MÉTHODE DIRECTE

On sait sous quelle forme se décompose la fraction. On réduit les fractions intervenant dans la décomposition au même dénominateur et on identifie le numérateur obtenu avec celui de la fraction de départ. On obtient un système d'équations linéaires où les inconnues sont les constantes devant les éléments simples. Ce n'est à envisager sous cette forme que pour des cas très simples (et dans ces cas on utilisera de toute façon des méthodes plus rapides). En revanche cette méthode pourra/devra être utilisée lorsqu'on aura réussi à déterminer certains coefficients et qu'on a utilisé toutes les astuces connues. Il ne restera en général que très peu de coefficients à déterminer.

TERMES DE PLUS HAUT EXPOSANT

Termes de degré 1

On considère un facteur $(X-a)^k$ dans la factorisation de B (k maximum). On peut écrire $B = (X-a)^kC$ avec $C(a) \neq 0$. On multiplie alors les deux cotés de l'égalité (d'un coté la fraction, de l'autre la décomposition) par $(X-a)^k$ puis on remplace X par a. À gauche, il reste $A(a)/C(a)$ et à droite le coefficient de $1/(X-a)^k$ (tous les autres termes ont au moins $X-a$ en facteur). *Cela ne fonctionne que pour le terme de plus grand exposant.*

On peut remarquer que si a est racine de multiplicité k dans B alors $B = \frac{B^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k + \ldots = (X-a)^kC$ avec $C(a) = \frac{B^{(k)}(a)}{k!}$. Ainsi le coefficient de $\frac{1}{(X-a)^k}$ dans la décomposition en éléments simples est $\frac{k!A(a)}{B^{(k)}(a)}$. Notamment si a est racine simple du dénominateur alors le terme est $\frac{A(a)}{B'(a)}$.

EXEMPLE

On veut décomposer

$$F_1 = \frac{3X^2+X-2}{(X-1)^2(X+2)^2}.$$

La décomposition va s'écrire

$$F = \frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{(X+2)^2} + \frac{d}{X+2}.$$

Pour obtenir a, on multiplie F par $(X-1)^2$ puis on remplace X par 1 (en fait on « cache » le facteur $(X-1)^2$). Il vient

$$a = \left(\frac{3X^2+X-2}{(X+2)^2}\right)_{|X=1} = \frac{2}{3^2} = \frac{2}{9}.$$

De même

$$c = \left(\frac{3X^2+X-2}{(X-1)^2}\right)_{|X=-2} = \frac{8}{9}.$$

Termes de degré 2

Pour un facteur $(X^2+bX+c)^\beta$ (irréductible et de plus grand exposant), on peut réaliser la même opération et instancier X à l'une des racines de X^2+bX+c. Puisque les constantes qui apparaissent dans la décomposition sont réelles (on part d'un polynôme à coefficients réels), on aura directement les deux constantes.

EXEMPLE

On veut décomposer

$$F_2 = \frac{3X+1}{(X+1)^2(X^2+X+1)}.$$

On sait que la décomposition va s'écrire

$$F_2 = \frac{a}{(X+1)^2} + \frac{b}{X+1} + \frac{cX+d}{X^2+X+1}.$$

On multiplie par X^2+X+1 puis on évalue en $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$:

$$\left(\frac{3X+1}{(j+1)^2}\right)_{X=j} = cj+d.$$

Or $1/(j+1)^2 = 1/(-j^2)^2 = 1/j^4 = j^2$ (on utilise $j^3=1$ et $1+j+j^2=0$). Il vient

$$cj+d = (3j+1)j^2 = 3j^3+j^2 = 3+j^2.$$

Le partie réelle donne $-\frac{c}{2}+d = 3-\frac{1}{2}$ la partie imaginaire $c\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. On a donc $c=-1$ puis $d=2$.

COMPORTEMENT EN L'INFINI

Une astuce supplémentaire consiste à multiplier chaque coté par X puis faire tendre X vers $+\infty$. On obtient alors parfois une nouvelle équation.

PARITÉ

Si la fraction F est paire ou impaire ($F(-X) = \pm F(X)$), on pourra utiliser l'unicité de la décomposition pour trouver de nouvelles relations

EXEMPLE

Soit $F_3 = \frac{1}{(X^4+1)} = \frac{1}{(X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1)}$. On remarque que $F_3(X) = F_3(-X)$. La décomposition de F_3 va s'écrire

$$F_3 = \frac{aX+b}{X^2-\sqrt{2}X+1} + \frac{cX+d}{X^2+\sqrt{2}X+1}.$$

la décomposition de $F_3(-X)$ va alors être (on remplace au dessus)

$$\begin{aligned} F_3(-X) &= \frac{-aX+b}{X^2+\sqrt{2}X+1} + \frac{-cX+d}{X^2-\sqrt{2}X+1} \\ &= \frac{-cX+d}{X^2-\sqrt{2}X+1} + \frac{-aX+b}{X^2+\sqrt{2}X+1} \\ F_3(X) &= \frac{aX+b}{X^2-\sqrt{2}X+1} + \frac{cX+d}{X^2+\sqrt{2}X+1} \end{aligned}$$

Ainsi en utilisant l'unicité des coefficients, on obtient les relations $a=-c$ et $b=d$ (deux fois).

Remarque : La factorisation du numérateur vient de $X^4+1 = (X^2+1)^2-2X^2 = (X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1)$.

L'ESSENTIEL - CAS PARTICULIERS

On veut décomposer en éléments simples la fraction $\frac{A}{B}$ avec $\deg A < \deg B$:

- → si a est racine simple de B, le coefficient de $\frac{1}{X-a}$ est $\frac{A(a)}{B'(a)}$
- → si a est racine de multiplicité k de B, le coefficient de $\frac{1}{(X-a)^k}$ est $k!\frac{A(a)}{B^{(k)}(a)}$
- → si $P = \lambda\prod_{k=1}^{p}(X-a_i)^{\alpha_i}$ alors $\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{p}\frac{\alpha_i}{X-a_i}$.

III. EXERCICES

Exercice 1

Refaire et terminer les décompositions des fractions F_1, F_2 et F_3

Exercice 2

Décomposer en éléments simples les fractions suivantes

a) $\dfrac{1}{X(X+1)(X+2)}$.

b) $\dfrac{1}{X(X^2+1)}$.

c) $\dfrac{1}{X^3+1}$.

d) $\dfrac{2X+1}{(X^2-X)^2}$.

e) $\dfrac{X^4-1}{X^2(X+1)}$.

f) $\dfrac{X^4}{(X+1)(X^2-1)}$.

g) $\dfrac{1}{X^n-1}$ (avec $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$)

Exercice 3

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$ (avec $n \geqslant 2$). Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x)P''(x) \leqslant P'^2(x)$.

Exercice 4

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ n'admettant que des racines simples non nulles $x_1, \ldots, x_n$. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i P'(x_i)} = -\frac{1}{P(0)}$. Que vaut $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{P'(x_i)}$?