

1

NOMBRES COMPLEXES

I. NOMBRES COMPLEXES

MODULES

L'ESSENTIEL - MODULES

- $z\bar{z} = |z|^2$ (souvent utilisée pour le calcul)
- $|z| = |\bar{z}|$, $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ et $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ si $z_2 \neq 0$.
- $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ avec égalité si, et seulement si z est réel.
- $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$ avec égalité si, et seulement si z est imaginaire pur.
- *Inégalité triangulaire* : $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
- *Seconde inégalité triangulaire* : $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2|$.
- *Cas d'égalité* $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $z_1 = \lambda z_2$ ou $z_2 = \lambda z_1$.
- *généralisation* : $|z_1 + \dots + z_n| = |z_1| + \dots + |z_n|$ si, et seulement si, il existe $z \in \mathbb{C}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ tels que $z_i = \lambda_i z$ pour tout i .

ARGUMENTS

L'ESSENTIEL - ARGUMENTS

- On note \mathbb{U} l'ensemble des complexes de module 1. Cet ensemble est un sous-groupe multiplicatif de \mathbb{C} . On note $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.
- L'application $\begin{cases} (\mathbb{R}, +) & \rightarrow (\mathbb{U}, \times) \\ \theta & \mapsto e^{i\theta} \end{cases}$ est un morphisme de groupes, surjectif et dont le noyau est l'ensemble des multiples entiers de 2π .
Cela signifie que :
 - si $|z| = 1$ alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$, $z = e^{i\theta}$,
 - on a $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ si, et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$, $\theta' - \theta = 2k\pi$,
 - on a $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'}$ et $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$.
- On appelle argument d'un nombre complexe **non nul** z , tout réel θ tel que $e^{i\theta} = \frac{z}{|z|}$. On note alors $\arg z = \theta [2\pi]$.
- Si z, z' sont non nuls
 - $\arg(zz') = \arg z + \arg z' [2\pi]$,
 - $\arg(1/z) = -\arg z [2\pi]$.
- les arguments sont définis modulo 2π . On fera par exemple attention de ne pas écrire $\arg zz' = \arg z + \arg z'$.

RACINES n -IÈMES

Proposition 1 (Racines d'un complexe)

soit $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle racine n -ième de a tout complexe z tel que $z^n = a$. Si une forme trigonométrique de $a \neq 0$ est $a = \rho e^{i\theta}$, alors les racines n -ièmes de a sont les n nombres complexes 2 à 2 distincts

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i \frac{\theta + 2k\pi}{n}} \text{ où } k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket.$$

Proposition 2 (Racines de l'unité)

On appelle racine n -ième de l'unité, tout complexe z tel que $z^n = 1$. Il y en a exactement n . On appelle alors \mathbb{U}_n l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité. On a $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$ et

$$\mathbb{U}_n = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \mathbb{Z}\} = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket\}.$$



L'ESSENTIEL - RACINES

- Si on note $\omega = e^{2i\pi/n}$, alors $\mathbb{U}_n = \{1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}\}$. On peut remplacer les exposants $\llbracket 0; n-1 \rrbracket$ par n'importe quelle suite de n entiers consécutifs.
- La somme des racines n -ièmes de l'unité vaut 0.
- Si z_0 est une racine n -ième d'un nombre complexe a non nul, alors on obtient toutes les racines n -ièmes de a en multipliant z_0 par les n racines n -ièmes de l'unité.

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE

L'ESSENTIEL

Soit A, B et M des points d'affixe respective a, b et z , alors

- $|b - a| = AB$ et $\left| \frac{z-a}{z-b} \right| = \frac{AM}{BM}$ (z différent de b),
- $\arg a = (\vec{i}, \vec{OA}) [2\pi]$ (a non nul),
- $\arg \left(\frac{z-a}{z-b} \right) = (\vec{BM}, \vec{AM}) [2\pi]$ (z différent de a et b).

Exercice 1 (Identité du parallélogramme)

Montrer que pour tout z et z' complexes, on a $|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$.

Exercice 2 (Inégalité triangulaire)

Soient z et z' deux complexes. Montrer que $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ avec égalité si et seulement s'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$, $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}^+$ tels que $z = \lambda z_0$ et $z' = \lambda' z_0$.

Exercice 3

Résoudre $(z^2 + 1)^n - (z + i)^{2n} = 0$.

II. TRIGONOMÉTRIE

$\cos(a + b)$	$=$	$\cos a \cos b - \sin a \sin b$	
$\cos(a - b)$	$=$	$\cos a \cos b + \sin a \sin b$	
$\sin(a + b)$	$=$	$\sin a \cos b + \sin b \cos a$	
$\sin(a - b)$	$=$	$\sin a \cos b - \sin b \cos a$	
$\cos 2a$	$=$	$2 \cos^2 a - 1$	$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$
	$=$	$1 - 2 \sin^2 a$	
$\cos^2 a$	$=$	$\frac{1 + \cos 2a}{2}$	$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$
$\sin \theta$	$=$	$\frac{2t}{1 + t^2}$	avec $t = \tan \frac{\theta}{2}$
$\cos \theta$	$=$	$\frac{1 - t^2}{1 + t^2}$	
$\tan \theta$	$=$	$\frac{2t}{1 - t^2}$	
$\tan(a + b)$	$=$	$\frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$	



III. OPÉRATIONS À CONNAÎTRE



MÉTHODE - TRANSFORMATIONS TRÈS IMPORTANTES À CONNAÎTRE

$$1 + e^{i\theta} = e^{i\theta/2} (e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}) = 2 \cos(\theta/2) e^{i\theta/2}$$

$$1 - e^{i\theta} = e^{i\theta/2} (e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}) = -2i \sin(\theta/2) e^{i\theta/2}$$

$$e^{ia} + e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} (e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{i\frac{b-a}{2}}) = 2 \cos \frac{a-b}{2} e^{i\frac{a+b}{2}}.$$

EXEMPLE - LINÉARISER DES PRODUITS SIMPLES

on veut linéariser $\sin a \sin b$. On voit que ce terme apparaît dans $\cos(a+b)$. On écrit alors

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \hline \cos(a-b) - \cos(a+b) &= 2 \sin a \sin b \end{aligned}$$

ce qui donne $\sin a \sin b = \frac{1}{2} (\cos(a-b) - \cos(a+b))$. *remarque* : on peut également utiliser les formules d'Euler.

EXEMPLE - LINÉARISER DES PUISSANCES À L'AIDE DES FORMULES D'EULER

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

$$\text{exemple : } \cos^3 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^3 = \frac{(e^{i\theta})^3 + 3(e^{i\theta})^2 e^{-i\theta} + 3e^{i\theta} (e^{-i\theta})^2 + (e^{-i\theta})^3}{8} = \frac{e^{3i\theta} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} + e^{-3i\theta}}{8} = \frac{\cos 3\theta + 3 \cos \theta}{4}.$$

EXEMPLE - ADDITIONNER DES SINUS OU COSINUS

On veut additionner $\cos p + \cos q$. On utilise

$$e^{ip} + e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}} (e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{i\frac{q-p}{2}}) = 2 \cos \frac{p-q}{2} e^{i\frac{p+q}{2}},$$

puis on prend la partie réelle, ce qui donne :

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}.$$

On peut également utiliser $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$ avec $p = a+b$ et $q = a-b$, ce qui revient à $a = \frac{p+q}{2}$ et $b = \frac{p-q}{2}$.

EXEMPLE - DÉVELOPPER EN PUISSANCES DE SINUS OU COSINUS

Exprimer $\sin 3\theta$ en fonction de $\sin \theta$. Puisque $\sin 3\theta = \text{Im}(e^{3i\theta})$,

$$\begin{aligned} e^{3i\theta} &= (e^{i\theta})^3 = (\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos^3 \theta + 3i \sin \theta \cos^2 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta - i \sin^3 \theta \\ &= \cos^3 \theta - 3 \cos \theta (1 - \cos^2 \theta) + i(3 \sin \theta \cos^2 \theta - \sin^3 \theta) \end{aligned}$$

ainsi $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$ et $\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$.

**MÉTHODE - TRANSFORMER DES COMBINAISONS LINÉAIRES SOUS LA FORME $a \cos x + b \sin x$**

on a $a \cos x + b \sin x = \operatorname{Re}((\cos x + i \sin x)(a - ib))$. Avec $R = |a - ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $a - ib = Re^{-i\varphi}$, cela donne $a \cos x + b \sin x = \operatorname{Re}(Re^{i(x-\varphi)}) = R \cos(x - \varphi)$.

En pratique, on factorise par $\sqrt{a^2 + b^2}$:

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right).$$

Puisque

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1,$$

il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \varphi \\ \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \varphi \end{cases}$. On termine alors grâce à la formule $\cos(x - \varphi)$.

EXEMPLE - DÉTERMINER DES SOMMES DE SINUS OU COSINUS :

soit $\theta \in \mathbb{R}$. On note, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$C_n = \sum_{k=0}^n \cos k\theta \text{ et } S_n = \sum_{k=0}^n \sin k\theta.$$

On a

$$C_n + iS_n = \sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^n (e^{i\theta})^k.$$

Si $e^{i\theta} \neq 1$, alors on obtient

$$C_n + iS_n = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{e^{i(n+1)\theta/2}}{e^{i\theta/2}} \left(\frac{-2i \sin((n+1)\theta/2)}{-2i \sin(\theta/2)} \right),$$

ce qui donne, après simplifications,

$$C_n = \frac{\cos \frac{n\theta}{2} \sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \text{ et } S_n = \frac{\sin \frac{n\theta}{2} \sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

Les valeurs ne sont pas à connaître mais la méthode doit être entièrement maîtrisée.

IV. EXERCICES**Exercice 4 (Inégalité triangulaire généralisée)**

Soient z_1, z_2, \dots, z_n des nombres complexes. Montrer que $\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$ avec égalité si et seulement si il existe $z_0 \in \mathbb{C}$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ tels que $z_k = \lambda_k z_0$ pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

Exercice 5

Déterminer les nombres complexes z tels que $|z| = |z + 1| = 1$.

Exercice 6

Soit $z \in \mathbb{C}$ différent de 1. Montrer que $\frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow |z| = 1$.

Exercice 7

Déterminer les complexes z tels que $z^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}}$. En déduire des valeurs simples pour $\cos(\frac{\pi}{8})$, $\sin(\frac{\pi}{8})$ et vérifier que $\tan(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{2} - 1$.

**Exercice 8**

1. On note $U_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}$ et $V_n = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}$. Déterminer U_n et V_n en fonction de n .

2. On note

$$U_n = \sum_{0 \leq 3k \leq n} \binom{n}{3k}, V_n = \sum_{0 \leq 3k+1 \leq n} \binom{n}{3k+1} \text{ et } W_n = \sum_{0 \leq 3k+2 \leq n} \binom{n}{3k+2}.$$

Déterminer U_n, V_n et W_n en fonction de n .

Exercice 9

Soit n un entier, $n \geq 2$, et $\omega = e^{2i\pi/n}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} (1 + \omega^k)^n$.

Exercice 10

Pour $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on note $D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx}$ et $S_n(x) = \sum_{k=0}^n D_k(x)$. Simplifier les deux écritures et vérifier que S_n est positive.

Exercice 11 (Mines MP)

☆

Soit a, b et c de module 1 tels que $a + b + c = 0$. Montrer que $a^2 + b^2 + c^2 = 0$.

Exercice 12

☆

Soient trois complexes non nuls a, b et c tels que $a + b + c = 0$ et $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$. Montrer que les trois complexes ont le même module. Que peut-on dire de plus?

Exercice 13 (Mines MP)

☆

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Calculer $\prod_{k=1}^{n-1} (1 - e^{2ik\pi/n})$.

Exercice 14

☆

Déterminer un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ de degré minimal ayant $a = 2 \cos \frac{\pi}{5}$ pour racine.

Exercice 15 (Polytechnique - pour 5/2)

☆

Soient G un sous-groupe de \mathbb{U} , $\Gamma = \left\{ z \in G; |z-1| < \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$, H le sous-groupe de G engendré par Γ . Exprimer une condition pour que H ne soit pas réduit à $\{1\}$ et prouver qu'alors $H = G$.

