CHAPITRE 33 - PLUSIEURS VARIABLES EXTREMA

Exercice 33.1

On a une équation implicite du type $f(x,y,z)=0$ où $f(x,y,z)=x^2-y^2-z-1$. Le vecteur gradient en un point de cette surface est orthogonal à la surface. On veut que ce vecteur soit colinéaire à $(1,2,-1)$, vecteur normal à P. On calcule le gradient :

$$\mathrm{grad}(f)=(2x,-2y,-1)$$

ce vecteur doit être colinéaire à $(1,2,-1)$, ce qui donne $x=1/2$ et $y=-1$, puis $z=-7/4$.

Exercice 33.2

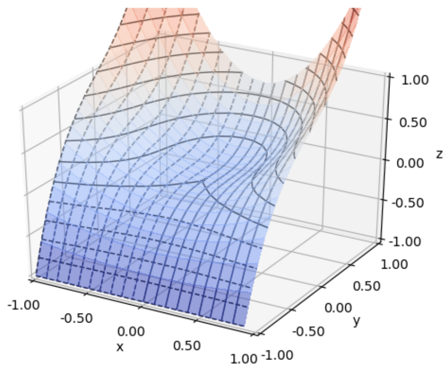
La fonction g est continue sur le carré $[0,1]^2$ qui est compact, donc g est bornée et atteint ses bornes sur le carré. Etudions d'abord l'existence de points critiques de g sur l'ouvert $]0,1[^2$. On a $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)=1+3x^2$. Cette dérivée partielle ne s'annule pas, donc g n'a pas de points critiques, ce qui signifie que g atteint ses bornes sur le bord du carré. On étudie g sur les quatre segments du bord.

- → Sur le segment d'extrémités $(0,0)$ et $(1,0)$, on a $g(x,0)=g(x,1)=x+x^3$. Cette fonction est croissante sur $[0,1]$, donc varie de $g(0,0)=0$ à $g(1,0)=2$. De même sur le segment d'extrémités $(0,1)$ et $(1,1)$.
- → Sur le segment d'extrémités $(0,0)$ et $(0,1)$, on pose $\varphi(y)=g(0,y)=-y+y^3$. On a $\varphi'(y)=-1+3y^2$, donc son minimum est $\varphi(1/\sqrt{3})=-2/3\sqrt{3}$, et son maximum est $\varphi(0)=\varphi(1)=0$.
- → De même, $g(1,y)=2-y-y^3=2+g(0,y)$, donc varie de $2-2/3\sqrt{3}$ à 2.

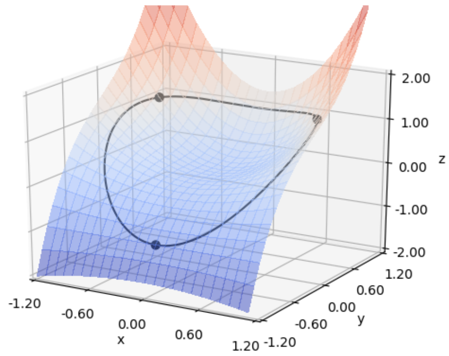
Finalement, le maximum de g sur le carré est égal à 2 et est atteint en $(1,0)$ et $(1,1)$, alors que le minimum est égal à $-\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ et est atteint en $(0,\dfrac{1}{\sqrt{3}})$.

Exercice 33.3

1. On recherche les points critiques. On a
$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x+2xy=2x(1+y) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}=x^2+3y^2$$
Le seul point critique est $(0,0)$ avec $f(0,0)=0$. On a $f(x,0)=x^2\geqslant 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ (inutile) et $f(0,y)=y^3$ avec $f(0,y)>0$ si $y>0$ et $f(0,y)<0$ si $y<0$. Il n'existe donc pas de voisinage de $(0,0)$ sur lequel $f(x,y)-f(0,0)$ garde un signe constant. Le point n'est pas un extremum local



2. La fonction f est continue sur le compact D donc admet un maximum et un minimum global. Ils sont soit à l'intérieur du domaine et seraient le point critique $(0,0)$ ce qui est impossible, soit au bord du domaine. On étudie la fonction sur le bord de D qu'on peut paramétrer par $t\longmapsto(\cos t,\sin t)$. On a
$$f(\cos t,\sin t)=\cos^2 t+\cos^2 t\sin t+\sin^3 t=\cos^2 t+\sin t(\cos^2 t+\sin^2 t)=\cos^2 t+\sin t=h(t)$$
On a $h(\pi-t)=h(t)$ - le graphe est symétrique par rapport à la droite d'équation $x=\pi/2$. On étudie sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. On a $h'(t)=-2\cos t\sin t+\cos t=\cos t(1-2\sin t)$. Un tableau de variation donne
→ un maximum $5/4$ atteint pour $t=\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$
→ un minimum -1 atteint pour $t=-\frac{\pi}{2}$ - c'est-à-dire en $(0,-1)$



Exercice 33.4

Soit $g(x, y, z) = x + y + z - A$. L'ensemble $X = \{(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+)^3, x + y + z = A\}$ est une partie compacte (intersection du plan d'équation $x + y + z = A$ avec le huitième d'espace x, y, z tous positifs). C'est borné (chaque composante est entre 0 et A) et fermé en tant qu'intersection de fermés. La fonction $f : (x, y, z) \mapsto xyz$ admet un maximum et un minimum sur ce compact. Le minimum est immédiatement 0. En un extremum, le gradient de f est colinéaire au gradient de g donc au vecteur $(1, 1, 1)$. Cela donne $yz = xy = xz = \lambda$. Si $\lambda \neq 0$ alors $x = y = z$. On trouve alors $(A/3, A/3, A/3)$ comme unique point candidat en dehors du bord. Le maximum à l'intérieur existant, il est obligatoirement atteint en ce point.
Même principe avec l'autre équation.

Exercice 33.5

1. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 15, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 6xy - 12.$$

   Le couple (x, y) est un point critique si, et seulement si, $x^2 + y^2 = 5$ et $xy = 2$. On obtient les quatre points critiques suivants : $(1, 2)$, $(-1, -2)$, $(2, 1)$ et $(-2, -1)$.

2. On évalue $f(x_0 + h, y_0 + k)$ et on essaie d'étudier le signe au voisinage de $(0, 0)$ à l'aide de la matrice hessienne par exemple $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$, $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6y$, $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x$, d'où $rt - s^2 = 36(x^2 - y^2) = \det H_f$.
   → En $(2, 1)$, f présente un minimum local.
   → En $(-2, -1)$, f présente un maximum local.
   → En $(1, 2)$ et $(-1, -2)$, il n'y a pas d'extremum local.
   On remarque que $f(x, 0) = x^3 - 15x$, qui a pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, et $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$, donc f n'est ni majorée, ni minorée sur $\mathbb{R}^2$.

3. Le triangle K est fermé borné, donc compact. Comme f est continue, elle est bornée et atteint ses bornes sur K. Si un extremum absolu est atteint en (a, b) situé à l'intérieur de K, alors (a, b) est un point critique, donc ce ne peut être que $(2, 1)$. On a $f(2, 1) = -28$. On doit maintenant chercher les extrema de f à la frontière de K, constituée de trois segments.
   → Si $y = 0$ et $0 \leqslant x \leqslant 3$, alors $f(x, 0) = x^3 - 15x$, qui décroit sur $[0, \sqrt{5}]$ et croit sur $[\sqrt{5}, 3]$, donc son minimum est $f(\sqrt{5}, 0) = -10\sqrt{5}$ et son maximum est $\max(f(0, 0), f(3, 0)) = 0$.
   → Si $x = 3$ et $0 \leqslant y \leqslant 3$, alors $f(3, y) = 9y^2 - 12y - 18$, qui décroit sur $[0, 2/3]$ puis croit, donc son minimum est $f(3, 2/3) = -22$ et son maximum est $\max(f(3, 0), f(3, 3)) = 27$.
   → Si $0 \leqslant x = y \leqslant 3$, alors $f(x, x) = 4x^3 - 27x$ décroit sur $[0, 3/2]$ puis croit sur $[3/2, 3]$, donc son minimum est $f(3/2, 3/2) = -27$ et son maximum est $\max(f(0, 0), f(3, 3)) = 27$.
   Il reste à faire la synthèse des résultats obtenus : le minimum de f sur K est égal à $f(2, 1) = -28$ et le maximum est $f(3, 3) = 27$.

Exercice 33.7

1. Soit $e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de f avec $f(e_i) = \lambda_i e_i$. Si $h = \sum_{i=1}^{n} h_i e_i$, alors $\langle f(h), h \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i h_i^2 > 0$ si $h \neq 0$ (les valeurs propres sont strictement positives).
2. (a) On a

$$g(x_0 + h) = \frac{1}{2} \langle f(x_0) + f(h), x_0 + h \rangle - \langle u, x_0 + h \rangle = g(x_0) + \frac{1}{2} \left(\langle f(x_0), h \rangle + \langle f(h), x_0 \rangle \right) - \langle u, h \rangle - \frac{1}{2} \langle f(h), h \rangle$$

Puisque f est symétrique, on a $\langle f(h), x_0\rangle = \langle h, f(x_0)\rangle$ et ainsi

$$g(x_0+h) = g(x_0) + \langle f(x_0)-u, h\rangle - \frac{1}{2}\langle f(h), h\rangle$$

On a $|\langle f(h), h\rangle| \leqslant \|f(h)\| \, \|h\| \leqslant |||f||| \, \|h\|^2$ donc $\langle f(h), h\rangle = o(\|h\|)$ et $h \mapsto \langle f(x_0)-u, h\rangle$ est linéaire. L'application g est bien différentiable et $\mathrm{d}g(x_0) : h \mapsto \langle f(x_0)-u, h\rangle$.

(b) la différentielle est nulle si et seulement si le vecteur $f(x_0)-u$ est nul donc si et seulement si $x_0 = f^{-1}(x_0)$ (f est bien inversible puisque f est à valeurs propres non nulles.

(c) Le calcul précédent avec ce choix de x_0 donne, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$,

$$g(x_0+h) - g(x_0) = -\frac{1}{2}\langle f(h), h\rangle$$

cette quantité est strictement négative sauf lorsque $h = 0$ où elle est nulle. On en déduit que pour tout $h \neq 0$, $g(x_0+h) < g(x_0)$ et g admet un maximum global en x_0.

Exercice 33.9

→ Soit $f(t) = \exp(tA)$. On veut $f(t)^T.f(t) = I_n$. On a $f(t)^T = \exp(tA^T)$ (somme partielle et continuité de la transposition). On a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp(tA^T)\exp(tA) = I_n$. On dérive :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \exp(tA^T)A^T\exp(tA) + \exp(tA^T)A\exp(tA) = 0,$$

d'où en évaluant en 0, $A + A^T = 0$ et A est antisymétrique (ou en simplifiant par $\exp(tA)$ et $\exp(tA^T)$. Réciproquement, si $A \in A_n(\mathbb{R})$, alors $\exp(tA^T) = \exp(-tA)$ et puisque les matrices tA et $-tA$ commutent, $\exp(tA^T)\exp(tA) = \exp(0) = I_n$. Ainsi les solutions sont toutes les matrices antisymétriques

→ Soit Γ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ à valeurs dans $O_n(\mathbb{R})$ et telle que $\gamma(0) = I_n$. On a $\Gamma(t)^T.\Gamma(t) = I_n$ pour t dans un voisinage de 0. En dérivant, on obtient

$$\Gamma'(t)^T.\Gamma(t) + \Gamma(t)^T.\Gamma'(t) = O \text{ et } \Gamma'(0)^T.\Gamma(0) + \Gamma(0)^T.\Gamma'(0) = O$$

ce qui donne $\Gamma'(0)^T + \Gamma'(0) = 0$ et $\Gamma'(0) \in A_n(\mathbb{R})$. Réciroquement, si $A \in A_n(\mathbb{R})$ alors $\Gamma(t) = \exp(tA)$ est à valeurs dans $O_n(\mathbb{R})$, $\Gamma(0) = I_n$ et $\Gamma'(0) = A$. Ainsi l'ensemble tangent à $O_n(\mathbb{R})$ en I_n est $A_n(\mathbb{R})$.