CHAPITRE 32 - ENDOMORPHISMES DES ESPACES EUCLIDIENS

Exercice 32.1

1. rotation d'axe $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ d'angle $+\pi/6$.
2. réflexion orthogonale par rapport au plan d'équation $x-2y+3z=0$
3. rotation d'axe $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ d'angle $+\pi/6$.
4. rélexion-rotation autour de $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ d'angle θ avec $\cos\theta = \frac{7}{9}$.

Exercice 32.2

Deux possibilités pour cet exercice :

→ on se place dans une base adaptée : on fixe $u = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, on complète en une base orthonormée (u,v,w) avec $v = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $w = u \wedge v$.
Dans cette base, la matrice de r est sous la forme standard. On détermine les coordonnées de e_2 et e_3 dans cette base afin d'écrire la relation $r(e_2) = e_3$. On obtient alors $\cos\theta$ et $\sin\theta$ puis avec un changement de bases, la matrice de r dans la base canonique.

→ On travaille directement dans la base canonique. La matrice de r est A avec

$$A = \begin{pmatrix}a & 0 & a'\\ b & 0 & b'\\ c & 1 & c'\end{pmatrix}.$$

On ecrit le fait que A est orthogonale : $c' = c = 0$, $a^2+b^2 = 1$, $a'^2+b'^2 = 1$ et $aa'+bb' = 0$. On a alors $a = \cos\theta$, $b = \sin\theta$, $a' = -\sin\theta'$ et $b' = \cos\theta'$ (par exemple, c'est pour simplifier) avec $\sin(\theta'-\theta) = 0$. Ainsi $\theta' = \theta$ ou $\theta' = \theta+\pi$. On a

$$A = \begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta'\\ \sin\theta & 0 & \cos\theta'\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Le déterminant de A doit être égal à 1, ce qui nous place dans la situation $\theta' = \theta+\pi$.

$$A = \begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ \sin\theta & 0 & -\cos\theta\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Enfin le vecteur d'axe doit être invariant, ce qui donne $\cos\theta+\sin\theta = 1$ et $-\cos\theta+\sin\theta = 1$. Ainsi $\cos\theta = 0$ et $\sin\theta = 1$. Finalement

$$A = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

C'est une rotation d'angle $+2\pi/3$ autour de l'axe dirigé par $(1,1,1)$.

Exercice 32.3

1. Le coefficient (j,j) de la matrice ${}^tAA$ est égal à $\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2$. Comme ${}^tAA = I_n$, on en déduit que $\forall j \in [\![1;n]\!]$, $\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2 = 1$, donc en sommant sur j variant de 1 à n, on a $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2 = n$. On peut le voir en écrivant que le carré de la norme de chacune des colonnes de A vaut 1. En ajoutant ces normés au carré, on trouve la somme des carrés des coefficients de A, et également n.
2. Soit V le ecteur colonne ${}^t(1,\dots,1)$. La $i^{\text{ème}}$ coordonnée de AV est égale à $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$, donc $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j} = (AV|V)$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,
$$\left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| \leqslant \|AV\|\,\|V\| = \|V\|^2 = n.$$
3. Comme $a_{i,j} \in [-1,1]$, on sait $a_{i,j}^2 \leqslant |a_{i,j}|$. En sommant pour i et j variant de 1 à n, on obtient $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| \geqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2 = n$ d'après la

première question. Par inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^{(n^2)}$, on a

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant \sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2}\sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} 1} = n\sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2} = n\sqrt{n}.$$

Exercice 32.4

La matrice A est symétrique car ${}^tA = I_n - 2{}^t(U{}^tU) = A$. On a donc ${}^tAA = A^2$. Par ailleurs, on a $A^2 = (I_n - 2U{}^tU)^2 = I_n - 4U{}^tU + 4u{}^tUU{}^tU$. Or ${}^tUU = 1$, si bien que $u{}^tUU{}^tU = U({}^tUU){}^tU = U{}^tU$. Finalement ${}^tAA = I_n$. La matrice A est donc orthogonale, mais également symétrique. C'est donc la matrice d'une symétrie orthogonale. Il reste à déterminer les vecteurs invariants par A. Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = X$. Cela équivaut à l'équation $(E) : 2u{}^tUX = 0$. Si U est le vecteur ${}^t(u_1,\dots,u_n)$ et S le vecteur ${}^t(x_1,\dots,x_n)$, l'équation (E) est équivalente à $(\sum_{i=1}^n u_i x_i)u = 0$. Comme le vecteur u est non nul, l'espace invariant est l'hyperplan d'équation $\sum_{i=1}^n u_i x_i = 0$. La matrice A est donc une réflexion orthogonale par rapport à l'hyperplan orthogonal au vecteur U.

Exercice 32.6

La matrice M est diagonalisable donc il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et des réels $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ tels que $M = P\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)P^{-1}$. L'égalité $M^p = I_n$ entraîne que $\forall i, \lambda_i^p = 1$, donc $\lambda_i \in \{-1,1\}$, d'où $\lambda_i^2 = 1$, ce qui donne immédiatement que $M^2 = PI_nP^{-1} = I_n$.

Exercice 32.7

On utilise la relation $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2 = \mathrm{tr}({}^tAA) = \mathrm{tr}(A^2)$ (car A est symétrique). La matrice A est symétrique et réelle, elle est donc diagonalisable dans une base orthonormale. Il existe une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}AP = D$ où $D = \mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$. On a alors $A = PDP^{-1}$ et $A^2 = PD^2P^{-1}$. En passant à la trace, on obtient $\mathrm{tr}(A^2) = \mathrm{tr}(PD^2P^{-1}) = \mathrm{tr}(D^2P^{-1}P) = \mathrm{tr}(D^2)$, d'où le résultat.

Exercice 32.8

La matrice ${}^tAA$ est symétrique réelle. Elle est donc diagonalisable. Il existe P inversible (et même orthogonale) telle que ${}^tAA = PDP^{-1}$ où D est diagonale de diagonale $\lambda_1,\dots,\lambda_n$. Alors

$$\det(I_n + {}^tAA) = \det(I_n + PDP^{-1}) = \det(P)\det(I_n + D)\det(P^{-1}) = \prod_{k=1}^n (1+\lambda_k).$$

Puisque les valeurs propres sont à peu près quelconques, on s'intéresse à chaque facteur $1+\lambda_k$. La matrice ${}^tAA$ est positive : si ${}^tAAX = \lambda X$ pour $X \neq 0$, on obtient en multipliant par ${}^tX$, $\|AX\|^2 = \lambda\|X\|^2$. Ainsi $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$. On obtient $\det(I_n + {}^tAA) \geqslant 1$.

Exercice 32.9

Soit $(x,y) \in E^2$. En appliquant l'hypothèse en x, y et $x+y$, on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= (u(x)+u(y)|x+y) = (u(x)|x) + (u(x)|y) + (x|u(y)) + (u(y)|y) \\ 0 &= 0 + (u(x)|y) + (x|u(y)) + 0. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x, y \in E$, $(x|u^*(y)) = -(x|u(y))$. Par unicité de l'adjoint, on en déduit que $u^* = -u$. On a alors $\ker u = \ker u^* = (\mathrm{Im}\ u)^\perp$.

Exercice 32.10

L'inclusion $\ker f \cap \ker f^* \subset \ker(f+f^*)$ est évidente. Soit $x \in \ker(f+f^*)$: on a $f(x) + f^*(x) = 0$. Puisque $\mathrm{Im}\ f \subset \ker f$, on a $f(f(x)) = 0$, d'où $f(f^*(x)) = 0$. En faisant le produit scalaire par x, on obtient que $(f^*(x)|f^*(x)) = 0$, d'où $f^*(x) = 0$, puis $f(x) = 0$ en reportant dans la relation de départ. On en déduit par double inclusion que $\ker(f+f^*) = \ker f \cap \ker f^*$.

Exercice 32.11

- → Supposons que $\mathrm{Im}\ u = \ker u$. Soit $x \in E$ tel que $u(x) + u^*(x) = 0$. En prenant l'image par u on obtient $u(u^*(x)) = 0$, d'où en faisant le produit scalaire par x, on obtient $(u^*(x)|u^*(x)) = 0$, d'où $u^*(x) = 0$ et en reportant $u(x) = 0$. Par conséquent, $x \in \ker u^* = (\mathrm{Im}\ u)^\perp = (\ker u)^\perp$, or $x \in \ker u$, d'où $x = 0$. On en déduit que l'endomorphisme $u + u^*$ est injectif, donc bijectif.
- → Supposons $u+u^*$ bijectif. Comme $u^2 = 0$, on a déjà $\mathrm{Im}\ u \subset \ker u$. Soit $x \in \ker u$. Par hypothèse, il existe $y \in E$ tel que $x = u(y) + u^*(y)$. En prenant l'image par u, on obtient $u(u^*(y)) = 0$, d'où $u^*(y) = 0$ en faisant le produit scalaire par y, ce qui donne $x = u(y) \in \mathrm{Im}\ u$. On a bien montré que $\mathrm{Im}\ u = \ker u$.

Exercice 32.12

Il existe un unique endomorphisme v de E tel que $v(e_i) = f_i$ pour tout $i \in [\![1;n]\!]$. Comme ces deux bases sont orthonormales, v est orthogonal . Soit $S = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (u(e_i)|f_j)^2$. On a $S = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (u(e_i)|v(e_j))^2 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} ((v^* \circ u)(e_i)|e_j)^2$. Notons $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de $v^* \circ u$ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$. Pour tout couple $(i, j) \in [\![1;n]\!]^2$, on a $m_{j,i} = ((v^* \circ u)(e_i)|e_j)$, donc

$$S = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{ji}^2 = \operatorname{tr}({}^tMM) = \operatorname{tr}((v^* \circ u)^* \circ v^* \circ u) = \operatorname{tr}(u^* \circ v \circ v^* \circ u) = \operatorname{tr}(u^* \circ u)$$

car $v \circ v^* = \mathrm{Id}_E$.

Exercice 32.13

Considérons l'application $\varphi : V \mapsto (\cos\theta)V + (\sin\theta)e \wedge V + (1 - \cos\theta)(e|V)e$. On veut montrer que $\rho = \varphi$.

→ *Première méthode :* il suffit de le vérifier sur une base de E, de préférence une base adaptée dans laquelle les calculs sont faciles, c'est-à-dire une base orthonormale dont le premier vecteur est e. On note cette base (e, e_1, e_2). Alors

$$\begin{aligned}
\varphi(e) &= (\cos\theta)e + (\sin\theta)e \wedge e + (1 - \cos\theta)(e|e)e \\
&= (\cos\theta)e + (1 - \cos\theta)e = e = \rho(e) \\
\varphi(e_1) &= (\cos\theta)e_1 + (\sin\theta)e \wedge e_1 + 0 = (\cos\theta)e_1 + (\sin\theta)e_2 = \rho(e_1) \\
\varphi(e_2) &= (\cos\theta)e_2 + (\sin\theta)e \wedge e_2 + 0 = (\cos\theta)e_2 + (\sin\theta)(-e_1) = \rho(e_2).
\end{aligned}$$

Comme ρ et φ coïncident sur une base, elles sont donc égales.

→ *Deuxième méthode :* on note $D = \mathrm{Vect}(e)$ et P le plan orthogonal à D. Soit $V \in E$. On écrit $V = \underbrace{(e|V)e}_{\text{sur } D} + \underbrace{(V - (e|V)e)}_{\text{sur } P}$. On note $w = V - (e|V)e$ la composante sur P. On remarque que $e \wedge w = e \wedge V - 0$. Ce vecteur est orthogonal à e et à w. Comme e et w sont orthogonaux, il est de même norme que w (e est unitaire). La base $(e, w, e \wedge w)$ est directe et $\rho(V) = (e|V)e + (\cos\theta\ w + \sin\theta\ e \wedge w)$. En remplaçant $e \wedge w$ par $e \wedge V$, on obtient

$$\begin{aligned}
\rho(V) &= (e|V)e + \cos\theta(V - (e|V)e) + \sin\theta\ e \wedge V \\
&= \cos\theta V + \sin\theta\ e \wedge V(1 - \cos\theta)(e|V)e.
\end{aligned}$$

Exercice 32.14

→ On note $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ les deux valeurs propres (elles sont conjuguées car le polynôme caractéristique de A est à coefficients réels). Soit X un vecteur propre de A pour la valeur propre $e^{i\theta}$. On note $X = Y + iZ$ avec $Y, Z \in M_{2,1}(\mathbb{R})$. On a $A\overline{X} = e^{-i\theta}\overline{X}$ (en conjugant) si bien de $\overline{X}$ est vecteur propre pour la valeur propre $e^{-i\theta}$.

→ On développe $AX = e^{i\theta}X$:

$$AY + iAZ = (Y\cos\theta - Z\sin\theta) + i(Y\sin\theta + Z\cos\theta).$$

On a par conséquent $AY = Y\cos\theta - Z\sin\theta$ et $AZ = Y\sin\theta + Z\cos\theta$. Si on prouve que (Z, Y) est une base de $M_{2,1}(\mathbb{R})$, alors la matrice, dans cette nouvelle base, de l'endomorphisme canoniquement associé à A sera

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

→ S'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Z = \lambda Y$, alors $X = (1 + i\lambda)Y$ et $\overline{X} = (1 - i\lambda)Y$. Les vecteurs X et $\overline{X}$ sont alors colinéaires (dans $\mathbb{C}$) et ne peuvent former une base de vecteurs propres (on peut aussi le démontrer en utilisant le fait que $Y = \frac{1}{2}(X + \overline{X})$ et $Z = \frac{1}{2i}(X - \overline{X})$ puis écrire une combinaison $\alpha Y + \beta Z = 0$ et prouver l'indépendance linéaire). Finalement (Z, Y) est libre donc est une base de $M_{2,1}(\mathbb{R})$. Cela termine la démonstration.

Exercice 32.16

On commence par réduire la matrice A (en base orthonormée mais ce n'est pas obligatoire). Elle est semblable à une matrice diagonale par blocs $D = (-I_m, R_{\theta_1}, \dots, R_{\theta_k})$ avec R_{θ_i} matrice d'une matrice d'angle θ_i et les θ_i sont dans $]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$: il existe $Q \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $A = QDQ^{-1}$. On a alors $A^p = QD^pQ^{-1}$ et A^p est convergente si et seulement si D^p est convergente (puisqu'on a également $D^p = Q^{-1}AQ$). Or D^k est la matrice diagonale $(-I_m^p, R_{p\theta_1}, \dots, R_{p\theta_k})$ - elle ne converge jamais (pas si immédiat que ça, mais ça se fait avec des suites extraites par exemples). On s'intéresse à la suite des moyennes.

→ Sur la partie $-I_m$, on obtient, suivant la parité, 0 ou $-\frac{1}{p+1}I_m$ et cette partie tend vers 0.

→ On s'intéresse au cas d'une matrice R_θ. On a $R_\theta = P^{-1}D_\theta P$ pour une certaine matrice de passage $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et D_θ la matrice $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$.

On calcule et simplifie la moyenne ce qui donne

$$R_\theta^p = P^{-1}\begin{pmatrix} S_{\theta,p} & 0 \\ 0 & S_{-\theta,p} \end{pmatrix}P$$

où $S_{\theta,p} = \frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p}(e^{i\theta})^k = \frac{1}{p+1}\frac{1-e^{i(p+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}$, de limite nulle lorsque p tend vers $+\infty$. Finalement, la limite de B_p est nulle.

Exercice 32.17

1. Soit $y = {}^tXAX$, alors $y \in M_{1,1}(\mathbb{R})$ et ${}^ty = y$. Cela donne ${}^tXAX = {}^tX(-A)X$, puis ${}^tXAX = 0$.
2. Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $(I_n + A)X = 0$. En multipliant par ${}^tX$, on obtient ${}^tXX + {}^tXAX = 0 = {}^tXX = \|X\|^2$. Ainsi $X = 0$ et $I_n + A$ est inversible (l'endomorphisme canoniquement associé est injectif).
3. La transposition commute avec le passage à l'inverse, donc ${}^tB = {}^t(I_n - A){}^t(I_n + A)^{-1}$, d'où ${}^tB = (I_n + A)(I_n - A)^{-1}$, or $I_n + A$ commute avec $I_n - A$ donc avec son inverse, d'où ${}^tBB = I_n$, donc B est orthogonale.
4. On a $\det B = \dfrac{\det(I_n - A)}{\det(I_n + A)}$, or $\det(I_n + A) = \det {}^t(I_n + A) = \det(I_n - A)$, d'où $\det B = 1$, donc $B \in O_n(\mathbb{R})$.

Exercice 32.19

1. Puisque a est unitaire $\langle a, x\rangle\, a$ est le projeté de x sur $D = \mathrm{Vect}(a)$. Un petit dessin et on se rend compte que f_a est la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan orthogonal à a. On peut le montrer différemment. Soit $e_1 = a$ et $e_2, \dots, e_n$ une base orthonormée de $H = D^\perp$. On a $f_a(e_1) = -e_1$ et $f_a(e_k) = e_k$ si $k \in [\![2;n]\!]$. La matrice de f_a dans la base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est diagonale de diagonale $(-1, 1, \dots, 1)$. On retrouve la symétrie orthogonale par rapport à H.
2. Soit $h = g \circ f_a \circ g^{-1}$. En tant que composée d'endomorphismes orthogonaux, h est un endomorphisme orthogonaux. Si $y = g(x) \in g(H)$ alors $h(x) = g(f_a(x)) = g(x) = y$. Les éléments de $g(H)$ sont invariants par h. De même $h(g(a)) = -g(a)$. Ainsi h est la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $g(H)$.

Exercice 32.20

Comme ${}^tB = A\,{}^tA - {}^tA\,A = B$, la matrice B est symétrique et réelle. Elle est donc diagonalisable dans une base orthonormale avec, d'après l'énoncé, des valeurs propres toutes positives. Or $\operatorname{tr} B = \operatorname{tr}(A\,{}^tA) - \operatorname{tr}({}^tA\,A) = 0$ est la somme des valeurs propres. Les valeurs propres sont donc toutes nulles et B est semblable à la matrice nulle donc B est nulle.

Exercice 32.21

1. voir cours
2. Pour tout vecteur x de norme 1, on a $(f(x) + g(x)|x) = (f(x)|x) + (g(x)|x) \geqslant (f(x)|x) + \lambda(g)$. On obtient ainsi, pour tout x de norme 1, $(f(x)|x) + \lambda(g) \leqslant \mu(f+g)$. On passe à la borne supérieure sur tous les vecteurs de norme 1, et on obtient $\mu(f+g) \geq \mu(f) + \lambda(g)$.

Exercice 32.22

1. Comme A commute avec sa transposée, on a $({}^tAA)^p = ({}^tA)^p A^p = 0$. On en déduit que toutes les valeurs propres de ${}^tAA$ sont nulles. Or cette matrice est symétrique donc diagonalisable, on en déduit qu'elle est nulle.
2. On sait que $\operatorname{tr}({}^tAA) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}^2$, donc cette somme est nulle, ce qui entraîne que tous ses termes sont nuls, donc que A est nulle.

Exercice 32.23

1. Puisque u est un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien, il existe $(e_1, \dots, e_n)$ base orthonormale de vecteurs propres associées aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, alors $u(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i$ et $(x|u(x)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$. On remarque notamment (cela servira par la suite), que pour tout $x \in E$, on a $(x|u(x)) \leqslant \lambda_n \|x\|^2$. Enfin on a $(x|u(x)) - \lambda_n \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda_n) x_i^2$. Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, on a $(\lambda_i - \lambda_n)x_i^2 \leqslant 0$. La somme précédente est une somme de termes négatifs. Elle est nulle seulement lorsque, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, on a $(\lambda_i - \lambda_n)x_i^2 = 0$. Lorsque $\lambda_i < \lambda_n$, cela donne $x_i = 0$ et il ne reste plus que des coefficients sur les vecteurs propres associés à la valeur propre λ_n. Si x vérifie $(x|u(x)) = \lambda_n \|x\|^2$, alors $x \in \ker(u - \lambda_n \mathrm{Id}_E)$. La réciproque est immédiate (et peut se faire en même temps que le sens direct).
2. D'après la question précédente, le vecteur x est un vecteur propre de u pour la valeur propre λ_n si et seulement si $(x|u(x)) = \lambda_n \|x\|^2$. Notons a_{ij} les coefficients de la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$. On a $(x|u(x)) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i x_j (e_i|u(e_j))$ et puisque la base $\mathscr{B}$ est orthonormale, on a $(e_i|u(e_j)) = a_{ij}$. Ainsi $(x|u(x)) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij} x_i x_j$. De même, on a $(y|u(y)) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij} |x_i||x_j|$. Or tous les coefficients a_{ij} sont positifs, et on a $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}|x_i||x_j| \geqslant \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij} x_i x_j = \lambda_n \|x_n\|^2$. On a également $\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = \|x\|^2$. Par conséquent, on obtient $(y|u(y)) \geqslant \lambda_n \|y\|^2$. Puisque λ_n est la plus grande des valeurs propres, on a, pour tout $z \in E$, $(z|u(z)) \leqslant \lambda_n \|z\|^2$ (voir au début). On a donc à la fois $(y|u(y)) \geqslant \lambda_n \|y\,|^2$ et $(y|u(y)) \leqslant \lambda_n \|y\|^2$. D'où $(y|u(y)) = \lambda_n \|y\|^2$, et, d'après la première question, cela équivaut à y vecteur propre pour la valeur propre λ_n.

Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ un vecteur propre associé à la valeur propre λ_k. On a de nouveau $(u(x)|x) = \lambda_k \|x\|^2 = \sum_{i \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij} x_i x_j$. On obtient alors

$$|\lambda_k| \|x\|^2 = \Big| \sum_{i \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij} x_i x_j \Big| \leq \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{ij} x_i x_j| = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij} |x_i| |x_j|,$$

puisque les coefficients a_{ij} sont positifs. Soit $y = \sum_{i=1}^{n} |x_i| e_i$. On a d'une part $(u(y)|y) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij} |x_i||x_j| \geqslant |\lambda_k| \|x\|^2$, et d'autre part, $(u(y)|y) \leqslant \lambda_n \|y\|^2$. On a également $\|y\|^2 = \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. On obtient alors $|\lambda_k| \|x\|^2 \leqslant (u(y)|y) \leqslant \lambda_n \|x\|^2$ et finalement $|\lambda_k| \leqslant \lambda_n$.

Exercice 32.24

Soit P une matrice orthogonale telle que $P^{-1} S P = {}^t P S P = D$ est diagonale de diagonale $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. On a, si $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{tr}(\Omega S) = \operatorname{tr}(\Omega P D {}^t P) = \operatorname{tr}(({}^t P \Omega P) D)$.

- → la matrice ${}^t P \Omega P$ est orthogonale comme produit de 3 matrices orthogonales
- → plus précisément, l'application $\Omega \mapsto {}^t P \Omega P$ est une bijection de $O_n(\mathbb{R})$ sur lui-même (attention ce n'est pas un espace vectoriel) : on vérifie que l'application réciproque est $\Omega' \mapsto P \Omega' {}^t P$ (qui va bien de $O_n(\mathbb{R})$ dans lui-même). Ainsi les matrices ${}^t P \Omega P$ décrivent $O_n(\mathbb{R})$, ce qui donne
$$\max\{\operatorname{tr}(\Omega.S), \Omega \in O_n(\mathbb{R})\} = \max\{\operatorname{tr}(\Omega.D), \Omega \in O_n(\mathbb{R})\}$$
- → On a $\operatorname{tr}(\Omega.D) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Omega_{[i,i]} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ avec égalité pour $\Omega = I_n$.
- → On en déduit que $\max\{\operatorname{tr}(\Omega.S), \Omega \in O_n(\mathbb{R})\} = \operatorname{tr} S$.

Exercice 32.25

Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A. On a $1 + (\det A)^{1/n} = 1 + (\lambda_1 \cdots \lambda_n)^{1/n}$. Il existe P inversible telle que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Alors $I_n + A = PCP^{-1}$ avec $C = \operatorname{diag}(1 + \lambda_1, \ldots, 1 + \lambda_n)$. On est donc ramené à montrer que pour n réels positifs,

$$1 + (\lambda_1 \cdots \lambda_n)^{1/n} \leqslant \prod_{k=1}^{n} (1 + \lambda_k)^{1/n}.$$

On se doute bien que cela revient à montrer une bonne inégalité de convexité... le tout est de trouver laquelle. On essaie de se rapprocher de l'écriture classique. On remarque que dès que l'un des λ_i est nul alors l'inégalité est automatiquement vérifiée. On suppose qu'ils sont tous strictement positifs. Cela devient équivalent à

$$\ln\Big(1 + (\lambda_1 \cdots \lambda_n)^{1/n}\Big) \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + \lambda_k).$$

Pour se ramener à une écriture usuelle, on utilise simplement $\exp(\ln u) = u$ si $u > 0$. On note $\mu_i = \ln \lambda_i$ et on se ramène à montrer la propriété équivalente suivante :

$$\ln\left(1 + \exp\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mu_k\right)\right) \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + \exp(\mu_k)).$$

On note $f : x \mapsto \ln(1 + e^x)$. L'inégalité est alors

$$f\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mu_k\right) \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\mu_k).$$

Il ne reste plus qu'à montrer que f est convexe. On dérive

$$f'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} = \frac{1}{1 + e^{-x}} \text{ et } f''(x) = -\frac{-e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} \geqslant 0$$

Exercice 32.26

1. La matrice A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale D à diagonale strcitement positive. Il existe P orthonormale telle que $A = PDP^{-1} = PD{}^tP$.
   - → Si $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, on note R la matrice $R = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda}_1, \ldots, \sqrt{\lambda}_n)$ (car les λ_i sont positifs). On a $R^2 = D$. Alors
   $$A = PD{}^tP = PR^{2\,t} = (PR{}^tP)(PR{}^tP) = C^2$$
   avec $C = PR{}^tP$. Cette matrice est symétrique et ses valeurs propres sont également strictement positives.
   - → On a ${}^t M = {}^t C^{-1}\, {}^t B {}^t C^{-1} = ({}^t C)^{-1} B ({}^t C)^{-1} = M$ puisque B et C sont symétriques. Soit X un vecteur colonne. On a, toujours puisque C est symétrique,
   $${}^t XMX = {}^t(C^{-1}X) B (C^{-1}X) = {}^t YBY$$
   avec $Y = C^{-1}X$. Puisque B est symétrique positive, alors ${}^t XMX = {}^t YBY \geqslant 0$, pour tout vecteur colonne X. On en déduit que la matrice symétrique M est positive et que ses valeurs propres sont positives.

- → On a $B = CMC$, $\det B = \det C^2 \det M = \det A . \det M$ et $A + B = C^2 + CMC = C(I_n + M)C$ d'où $\det(A + B) = \det C^2 . \det(I_n + M)$. On est donc ramené à montrer que $1 + \det M \geqslant \det(I_n + M)$ avec M symétrique positive. On diagonalise M. Si on note $\mu_1, \dots, \mu_n$ les valeurs propres de M (toutes positives), on a $1 + \det M = 1 + \mu_1 \dots \mu_n$ et $\det(I + M) = \prod_{k=1}^{n} (1 + \mu_i)$. Lorsqu'on développe ce produit, on fait apparaître $1 + \mu_1 \dots \mu_n$ et plein de termes tous positifs. On a donc le résultat.

2. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la matrice $A_p = A + \frac{1}{p} I_n$ est symétrique définie positive. On a lors $\det(A_p + B) \geqslant \det A_p + \det B$. Par continuité du déterminant sur $M_n(\mathbb{R})$, lorsque p tend vers $+\infty$, on obtient $\det(A + B) \geqslant \det A + \det B$.

Exercice 32.27

1. La matrice A est symétrique réelle définie positive, elle est donc diagonalisable et toutes ses valeurs propres sont strictement positives. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A. On a $\det A = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k$ et $\operatorname{tr} A = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$. Montrer que $(\det A)^{1/n} \leqslant \frac{\operatorname{tr} A}{n}$, revient à montrer que $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln \lambda_k \leqslant \ln\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \lambda_k\right)$ (toutes les valeurs propres sont strictement positives). Puisque $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$ et $1/n > 0$, c'est une conséquence de la concavité de la fonction logarithme.
2. Soit E_i le vecteur de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ dont la i-ème coordonnée est égale à 1, les autres coordonnées étant nulles. Alors ${}^tE_i A E_i = {}^tE_i C_i$ où C_i est la colonne i de A, et donc ${}^tE_i A E_i = a_{ii}$. Par conséquent $a_{ii} = {}^tE_1 A E_i > 0$, puisque A est définie positive.
3. Soit X un vecteur colonne non nul. On a ${}^tXBX = {}^tXDADX = {}^tDXA(DX) > 0$ puisque D est diagonale (donc symétrique) et que DX n'est pas le vecteur nul. La matrice B est également symétrique (${}^tB = D^tAD = B$). La matrice B est donc symétrique réelle définie positive. La multiplication de A par D à droite a pour effet de multiplier la colonne i par $\frac{1}{\sqrt{a_{ii}}}$ et la multiplication à gauche a pour effet de multiplier la ligne i par $\frac{1}{\sqrt{a_{ii}}}$. L'élément diagonal a_{ii} est donc multiplié par $1/a_{ii}$. La diagonale de la matrice B est donc constituée de 1. En appliquant la première formule de l'exercice, on obtient $\det B = \det(D)^2 \det A \leq \left(\frac{\operatorname{tr} B}{n}\right)^n = 1$, et donc $\det A \leq \frac{1}{\det(D)^2} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Exercice 32.28

1. → **Existence** La matrice $A = {}^tMM$ est symétrique définie positive. Il existe S symétrique définie positive telle que $A = S^2$. On pose alors $U = MS^{-1}$ de sorte que $M = US$ et ${}^tUU = {}^tS^{-1}\,{}^tMMS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n$ donc U est orthogonale.
   → **Unicité** Supposons $M = US = U'S'$ avec U et U' orthogonales, S et S' symétriques définies positives. On a alors ${}^tMM = {}^tS{}^tUUS = S^2$ et de même ${}^tMM = S'^2$, d'où $S^2 = S'^2$. On utilise la partie unicité de l'exercicesur la racine carrée pour obtenir $S = S'$, ce qui donne en remplaçant $U = U'$.
2. → Soit $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = {}^tMM$. L'application f est continue et $O_n(\mathbb{R})$ est l'image réciproque par f du singleton $\{I_n\}$ qui est fermé, donc $O_n(\mathbb{R})$ est fermé dans $M_n(\mathbb{R})$. Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$, alors $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $\|MX\| = \|X\|$, donc la norme triple de M est égale à 1, donc $O_n(\mathbb{R})$ est borné dans $M_n(\mathbb{R})$. On en déduit que c'est un compact.
   → Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{S}_n^+$ qui converge vers A. Pour tout entier k et tout vecteur colonne X de $\mathbb{R}^n$, on a ${}^tA_k = A_k$ et ${}^tXA_kX \geqslant 0$, donc en faisant tendre k vers l'infini, on obtient ${}^tA = A$ et ${}^tXAX \geqslant 0$, d'où $A \in S_n^+$. Il en résulte que S_n^+ est fermé dans $M_n(\mathbb{R})$.
3. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ non inversible. Comme $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$, il existe une suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $GL_n(\mathbb{R})$ qui converge vers M. En appliquant la question 1), pour tout entier k, il existe U_k orthogonale et S_k symétrique définie positive telles que $M_k = U_kS_k$. Comme $O_n(\mathbb{R})$ est compact, on peut extraire de la suite $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $(U_{\phi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une matrice $U \in O_n(\mathbb{R})$. Par conséquent, $S_{\phi(k)} = U_{\phi(k)}^{-1} M_{\phi(k)}$ converge vers la matrice $S = U^{-1}M$. Or S_n^+ est fermé, donc $S \in S_n^+$, et on a bien $M = US$.