

CHAPITRE 31 - VARIABLES ALÉATOIRES

Exercice 31.1

1. (a) Les 5 épreuves sont indépendantes. Chaque épreuve n'a que deux issues possibles : le joueur tire une boule blanche (succès avec la probabilité $p = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$) ou le joueur tire une boule noire (échec avec la probabilité $\frac{4}{5}$). La variable X considérée représente donc le nombre de succès au cours de l'expérience et suit donc une loi binomiale de paramètre $(5, \frac{1}{5})$: $X(\Omega) = \llbracket 0, 5 \rrbracket$ et, $\forall k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket$, $\mathbb{P}(X = k) = \binom{5}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{5-k}$. Donc, $\mathbb{E}(X) = 5 \times \frac{1}{5} = 1$ et $V(X) = 5 \times \frac{1}{5} \times \left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{4}{5} = 0,8$.
- (b) D'après les hypothèses, on a $Y = 2X - 3(5 - X)$, c'est-à-dire $Y = 5X - 15$. On en déduit que $Y(\Omega) = \{5k - 15 \text{ avec } k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket\}$, et on a $\forall k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket$, $\mathbb{P}(Y = 5k - 15) = \mathbb{P}(X = k) = \binom{5}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{5-k}$. Enfin $Y = 5X - 15$, donc $\mathbb{E}(Y) = 5\mathbb{E}(X) - 15 = 5 - 15 = -10$ et $V(Y) = 25V(X) = 20$.
2. (a) Comme les tirages se font sans remise, on peut supposer que le joueur tire les 5 boules dans l'urne en une seule fois au lieu de les tirer successivement. On a $X(\Omega) = \llbracket 0, 2 \rrbracket$. Notons A l'ensemble dont les éléments sont les 10 boules initialement dans l'urne. Ω est constitué de toutes les parties à 5 éléments de A . Donc $\text{card } \Omega = \binom{10}{5}$. Soit $k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$. L'événement $(X = k)$ est réalisé lorsque le joueur tire k boules blanches et $(5 - k)$ boules noires dans l'urne. Il a donc $\binom{2}{k}$ possibilités pour le choix des boules blanches et $\binom{8}{5-k}$ possibilités pour le choix des boules noires : $\forall k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{2}{k} \times \binom{8}{5-k}}{\binom{10}{5}}.$$

- (b) On a toujours $Y = 5X - 15$. On a $\forall k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$, $\mathbb{P}(Y = 5k - 15) = \mathbb{P}(X = k)$.

Exercice 31.2

On note A_i (B_i) l'événement « on tire un jeton blanc (noir) au i ème tirage ». Puisque au i -ième tirage l'urne contient $n + i$ jetons et $n + i - 1$ jetons blancs,

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{n+i-1}{n+i} \quad \mathbb{P}(B_i) = \frac{1}{n+i}$$

et comme

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{k-1} \cap B_k) = \prod_{1 \leq i \leq k-1} \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}(B_k) \\ \mathbb{P}(X = k) &= \frac{n}{n+1} \frac{n+1}{n+2} \dots \frac{n+k-2}{n+k-1} \frac{1}{n+k} = \frac{n}{(n+k-1)(n+k)} = \frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k} \end{aligned}$$

et avec le télescopage, on vérifie que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1$$

La variable aléatoire X n'est pas d'espérance finie puisque la série de terme général $k\mathbb{P}(X = k)$ diverge.

Exercice 31.3

1. on développe pour faire apparaître une fonction du second degré : $x^2 - 2\mathbb{E}(X)x + \mathbb{E}(X^2)$. Son minimum est obtenu en $\mathbb{E}(X)$ et vaut $V(X)$.
2. Avec la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}((X-x)^2) \geq V(X)$, c'est-à-dire $V(X) \leq \mathbb{E}((X-x)^2)$. On cherche la bonne valeur de x . On a

$$(a \leq X \leq b) = \left(\frac{a-b}{2} \leq X - \frac{a+b}{2} \leq \frac{b-a}{2} \right) = \left((X-x)^2 \leq \frac{(b-a)^2}{4} \right) \text{ avec } x = \frac{a+b}{2}$$

On a donc presque sûrement, pour $x = \frac{a+b}{2}$, $(X-x)^2 \leq \frac{(b-a)^2}{4}$ et ainsi $\mathbb{E}((X-x)^2) \leq \mathbb{E}\left(\frac{(b-a)^2}{4}\right) = \frac{(b-a)^2}{4}$. Cela donne finalement $V(X) \leq \frac{(b-a)^2}{4}$.

Exercice 31.4

1. (a) On écrit, pour $k \geq 1$, l'événement $(L_1 = k)$ à l'aide des tirages :

$$(L_1 = k) = (P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_k \cap F_{k+1}) \cup (F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_k \cap P_{k+1})$$

cela donne, par indépendance des tirages, $\mathbb{P}(L_1 = k) = p^k q + q^k p$.

(b) $G_{L_1}(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} (p^k q + q^k p) t^k = \frac{pqt}{1-pt} + \frac{pqt}{1-qt}$. On a plusieurs expressions possibles :

$$G_{L_1}(t) = pqt \frac{2-t}{(1-pt)(1-qt)} = q \frac{pt-1+1}{1-pt} + p \frac{qt-1+1}{1-qt} = -q + \frac{q}{1-pt} - p + \frac{p}{1-qt} = \frac{q}{1-pt} + \frac{p}{1-qt} - 1$$

On dérive : pour tout $t \in]-1, 1[$, $G'_{L_1}(t) = \frac{pq}{(1-pt)^2} + \frac{pq}{(1-qt)^2}$. Puisque la limite en 1 existe, on a

$$\mathbb{E}(L_1) = \frac{pq}{(1-p)^2} + \frac{pq}{(1-q)^2} = \frac{p}{q} + \frac{q}{p}.$$

(c) On sait décrire les événements $(L_1 = n \text{ et } L_2 = \ell)$:

$$(L_1 = p \text{ et } L_2 = \ell) = (F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n \cap P_{n+1} \cap \dots \cap P_{n+\ell} \cap F_{n+\ell+1}) \cup (P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_n \cap F_{n+1} \cap \dots \cap F_{n+\ell} \cap P_{n+\ell+1})$$

ce qui donne (comme précédemment), $\mathbb{P}(L_1 = n \cap L_2 = \ell) = p^n q^\ell p + q^n p^\ell q = p^{n+1} q^\ell + q^{n+1} p^\ell$. Puisque la famille $((L_1 = n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements (enfin pas exactement, il y a l'événement $(L_1 = +\infty)$ de probabilité nulle), on obtient

$$\mathbb{P}(L_2 = \ell) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(L_1 = n \cap L_2 = \ell) = \sum_{n=1}^{+\infty} p^{n+1} q^\ell + q^{n+1} p^\ell = \frac{p^2}{1-p} q^\ell + \frac{q^2}{1-q} p^\ell = p^2 q^{\ell-1} + q^2 p^{\ell-1}.$$

ce qui ne donne pas la même loi que L_1 .

2. c'est assez proche...

(a) $\mathbb{P}(L_1 = n) = p^n + q^n$ (que des piles ou que des faces) et si $k < n$, alors on retrouve l'expression précédente, $\mathbb{P}(L_1 = k) = p^k q + q^k p$.

(b) On dérive $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, ce qui donne

$$\sum_{k=1}^{n-1} kx^{k-1} = \frac{-nx^{n-1}(1-x) + 1-x^n}{(1-x)^2} = \frac{(n-1)x^n - nx^{n-1} + 1}{(1-x)^2}.$$

(c) calcul d'une somme finie :

$$\mathbb{E}(L_1) = \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(L_1 = k) = n(p^n + q^n) + q \sum_{k=1}^{n-1} kp^k + p \sum_{k=1}^{n-1} kq^k$$

plus qu'à remplacer et simplifier... ce qui donne (enfin j'espère)

$$\mathbb{E}(L_1) = \frac{p}{q} (1 + (n-2)p^n) + \frac{q}{p} (1 + (n-2)q^n).$$

Lorsque n tend vers $+\infty$, on retrouve l'espérance de la question 1.

Exercice 31.5

1. On a $\sum_{k=p}^n \frac{k!}{(k-p)!} = p! \sum_{k=p}^n \binom{k}{p}$. On doit donc montrer que

$$p! \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \frac{(n+1)!}{(p+1)(n-p)!} \text{ ou encore que } \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!} = \binom{n+1}{p+1}$$

Cela se montre par exemple par récurrence sur $n \geq p$. La relation est immédiate si $n = p$ (on a 1 = 1). Si elle est vraie à l'indice n , alors

$$\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+2}{p+1}$$

2. (a) le tirage étant simultanée, on a $\binom{n}{p}$ tirages possibles.

(b) l'événement $X = k$ est réalisé si on a tiré le jeton numéroté k et $p-1$ jetons parmi les jetons de 1 à $k-1$. Le nombre de tels tirages est $\binom{k-1}{p-1}$. Cela donne (chaque tirage étant équiprobable),

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{k-1}{p-1}}{\binom{n}{p}} = \frac{(k-1)!}{(p-1)!(k-p)!} \frac{p!(n-p)!}{n!} = \frac{(k-1)!(n-p)!p}{(k-p)!n!} = \frac{k!(n-p)!p}{(k-p)!n!k}$$

(c) On a alors, puisque $X(\Omega) = \llbracket p; n \rrbracket$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=p}^n k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=p}^n k \frac{k!(n-p)!p}{(k-p)!n!k} = \frac{(n-p)!p}{n!} \sum_{k=p}^n \frac{k!}{(k-p)!} = \frac{(n-p)!p}{n!} \frac{(n+1)!}{(p+1)(n-p)!} = \frac{p(n+1)}{p+1}$$

3. On peut refaire tous les calculs précédents dans l'autre sens ou simplement « symétriser » la question : on renumérote le jeton k avec un second numéro qui vaut $n + 1 - k$.

(a) Avoir $Y = k$ est la même chose qu'avoir $X = n + 1 - k$. On a donc $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X = n + 1 - k)$.

(b)

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{n+1-p} k \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=1}^{n+1-p} k \mathbb{P}(X = n + 1 - k) = \sum_{i=p}^n (n + 1 - i) \mathbb{P}(X = i) = n + 1 - \mathbb{E}(X) = (n + 1) \left(1 - \frac{p}{p+1}\right) = \frac{n+1}{p+1}$$

On trouve bien que $\mathbb{E}(X) = p\mathbb{E}(Y)$

remarque : pour $p = 1$, on a $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = \frac{n+1}{2}$ (valeur moyenne des jetons). Pour $p = n$, on a X qui vaut toujours n et Y qui vaut toujours 1 d'où $\mathbb{E}(X) = n$ et $\mathbb{E}(Y) = 1$

Exercice 31.6

1. Avant de commencer, on se trouve dans la situation $A = (0, 0)$ et $B = (1, 1)$. Après un échange, on a $A = (0, 1)$ et $B = (0, 1)$. On a donc X_1 qui a pour seule valeur 1 et $\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1$.

2. La variable aléatoire peut prendre les valeurs 0, 1 et 2. On utilise le système complet d'événements $X_n = 0$, $X_n = 1$ et $X_n = 2$. On a
 $\rightarrow \mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | X_n = 0) \mathbb{P}(X_n = 0) + \mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | X_n = 1) \mathbb{P}(X_n = 1) + \mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | X_n = 2) \mathbb{P}(X_n = 2)$ si $X_n = 0$ alors X_{n+1} ne sera pas nulle, de même si $X_n = 2$. On a donc $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | X_n = 1) \mathbb{P}(X_n = 1)$. Si $X_n = 1$ alors on est dans la situation $(0, 1)$ pour A et B . On aboutit à la situation $(0, 0)$ dans A si on a choisi le jeton 1 dans A et 0 dans B . Ainsi $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | X_n = 1) = \frac{1}{4}$.

Enfin $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{4} \mathbb{P}(X_n = 1)$.

\rightarrow Exactement de la même manière, on a $\mathbb{P}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{4} \mathbb{P}(X_n = 1)$.

\rightarrow Enfin $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_{n+1} = 0) - \mathbb{P}(X_{n+1} = 2) = 1 - \frac{1}{2} \mathbb{P}(X_n = 1)$.

3. On note $a_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$. On a la relation de récurrence $a_{n+1} = 1 - \frac{1}{2} a_n$ avec $a_1 = 1$. On peut poser $a_0 = 0$ pour que la relation soit valable à partir du rang 0. On détermine la solution de cette récurrence. Si $\ell = 1 - \frac{1}{2} \ell$, alors $\ell = \frac{2}{3}$ et $b_n = a_n - \ell$ est géométrique de raison $-\frac{1}{2}$. On a par conséquent $b_n = \frac{1}{2^n} b_0$ et $a_n = \frac{2}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$. On a alors $\mathbb{P}(X_n = 0) = \mathbb{P}(X_n = 2) = \frac{1}{4} a_{n-1}$ si $n \geq 1$.

4. On peut effectuer le calcul ou utiliser $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{P}(X_n = 1) + 2\mathbb{P}(X_n = 2) = 1 - \frac{1}{2} \mathbb{P}(X_n = 1) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(X_n = 1) = 1$ si $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 31.7

1. En notant $p_i = \mathbb{P}(X = i) = \mathbb{P}(Y = i)$,

$$\mathbb{P}(U = k) = 2 \sum_{i=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}((X = k) \cap (Y = i)) + \mathbb{P}(X = k \cap Y = k) = 2 \sum_{i=k+1}^{+\infty} p_k p_i + p_k^2$$

$$\mathbb{P}(V = k) = 2 \sum_{i=0}^{k-1} k - 1 p_k p_i + p_k^2$$

2. Dans le cas où $X \sim \mathcal{G}(p)$,

$$\mathbb{P}(U = k) = 2p^2 q^{k-1} \sum_{i=k+1}^{+\infty} q^{i-1} + p^2 (q^2)^{k-1} = p(2-p)(q^2)^{k-1}$$

$$\mathbb{P}(V = j) = 2p^2 q^{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} k - 1 q^{i-1} + p^2 (q^2)^{k-1} = 2p q^{k-1} - p(2-p)(q^2)^{k-1}$$

On remarque que $\mathbb{P}(U = k) + \mathbb{P}(V = k) = \mathbb{P}(X = k) + \mathbb{P}(Y = k) = 2p q^{k-1}$ et que U suit une loi géométrique de paramètre $p_1 = (1 - q^2) = p(2 - p)$ donc

$$\mathbb{E}(U) = \frac{1}{p_1} = \frac{1}{p(2-p)}$$

$$\mathbb{E}(V) = 2p \sum_{k=1}^{+\infty} k q^{k-1} - \mathbb{E}(U) = \frac{2}{p} - \frac{1}{p(2-p)} = \frac{3-2p}{p(2-p)}$$

Exercice 31.8

Pour $k \geq 2$, $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \leq k) - \mathbb{P}(X \leq k - 1)$. Il est facile de calculer $\mathbb{P}(X \leq k)$ en comptant le nombre de tirages de n boules dans $\llbracket 1; k \rrbracket$ d'où

$$\mathbb{P}(X \leq k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n$$

D'où la loi de X :

$$\mathbb{P}(X = k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n$$

Ensuite

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^N k \frac{k^n}{N^n} - \sum_{k=1}^{N-1} (k+1) \frac{k^n}{N^n} = N - \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n$$

Donc

$$\frac{\mathbb{E}(X)}{N} = 1 - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n$$

et on reconnaît une somme de Riemann,

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} (k/n)^n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

d'où

$$\frac{\mathbb{E}(X)}{N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

Exercice 31.9

1. On note G_i l'événement « le jour i a gagné ». On a

$$V_n = \bigcup_{k=1}^n \left(\overline{G_1} \cap \dots \cap \overline{G_{k-1}} \cap G_k \cap \overline{G_{k+1}} \cap \dots \cap \overline{G_n} \right).$$

La réunion est disjointe et par symétrie, la probabilité de chacun des événements de la réunion est la même. On a alors

$$\mathbb{P}(V_n) = n\mathbb{P}\left(G_1 \cap \overline{G_2} \cap \dots \cap \overline{G_n}\right)$$

On filtre alors suivant le nombre de points de G_1 :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(G_1 \cap \overline{G_2} \cap \dots \cap \overline{G_n}\right) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\left(G_1 \cap \overline{G_2} \cap \dots \cap \overline{G_n}\right) \cap (X_1 = k)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left((X_1 = k) \cap (X_2 \leq k-1) \cap \dots \cap (X_n \leq k-1)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} F(k-1)^{n-1} \mathbb{P}(X_1 = k) \end{aligned}$$

Cela donne le résultat.

2. On note N le plus grand entier tel que $\mathbb{P}(X_1 = N) > 0$. On a alors $F(N-1) = 1 - \mathbb{P}(X_1 = N) < 1$ et $\mathbb{P}(V_n) = \sum_{k=1}^N nF(k-1)^{n-1} \mathbb{P}(X_1 = k)$. Pour

tout $k \in \llbracket 1; N \rrbracket$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} nF(k-1)^{n-1} = 0$ (croissances comparées avec $0 \leq F(k-1) \leq F(N-1) < 1$). Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(V_n) = 0$: le nombre de points est borné et le nombre de joueurs grands. Il y a de moins en moins de chance pour qu'il y ait un unique gagnant.

3. On a $\mathbb{P}(X_1 = k) = \frac{1}{m+1}$ et $F(k-1) = \frac{k}{m+1}$. Cela donne

$$\mathbb{P}(V_n) = \sum_{k=1}^m n \left(\frac{k}{m+1}\right)^{n-1} \frac{1}{m+1} = \frac{n}{(m+1)^n} \sum_{k=1}^m k^{n-1}.$$

Par comparaison série-intégrale (cas croissant), on montre que $\sum_{k=1}^m k^{n-1} \underset{m \rightarrow +\infty}{\sim} \int_1^m t^{n-1} dt \underset{m \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{m^n}{n} \underset{m \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(m+1)^n}{n}$. On en déduit que $\lim_{m \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(V_n) = 1$ (le nombre de joueur est fixé et le nombre de points possibles devient grand - les joueurs vont avoir de plus en plus tendance à avoir un nombre de points distinct).

Exercice 31.10

On a tout d'abord $X(\Omega) = \llbracket 2; +\infty \rrbracket$. On note A_i l'événement « on a tiré i au premier tirage ». Une fois le premier tirage obtenu, le temps d'attente pour avoir un nouveau numéro suit une loi géométrique de paramètre $p = \frac{n-1}{n}$. Ce temps d'attente est $X-1$. On a donc $\mathbb{P}(X-1 = k | A_i) = p q^{k-1}$. On a ainsi

$$\mathbb{P}(X = k) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X-1 = k-1 | A_i) \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=1}^n \frac{n-1}{n} \frac{1}{n^{k-1}} \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} \frac{1}{n^{k-1}}.$$

En fait la valeur du premier tirage importe peu et on pourrait dire simplement que $X-1$ suit une loi géométrique de paramètre $p = \frac{n-1}{n}$. On en déduit que $\mathbb{E}(X-1) = \frac{1}{p} = \frac{n}{n-1}$ donc $\mathbb{E}(X) = 1 + \frac{n}{n-1} = \frac{2n-1}{n-1}$ (ce qui semble logique, plus n est grand est plus X a des chances de valoir 2).

Enfin $V(X-1) = V(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{n}{(n-1)^2}$.

Exercice 31.11

1. Quelles que soient les rangs d'obtention des $k-1$ premières vignettes, l'expérience aléatoire pour obtenir une k -ième vignette est la même : c'est le temps du premier succès pour une succession d'épreuve de Bernoulli indépendantes de même paramètre. La variable aléatoire Y_1 est constante égale à 1 (la seule valeur prise par Y_1 est 1 et $\mathbb{P}(Y_1 = 1) = 1$).

2. Y_k suit une loi géométrique de paramètre $p = \frac{n-k}{n}$ (on a $n-k+1$ vignettes possibles non obtenues sur les n).

3.

(a) On a $X = \sum_{k=1}^n Y_k$. Puisque $Y_k \hookrightarrow \mathcal{G}(p_k)$ avec $p_k = \frac{n-k+1}{n}$, on a $\mathbb{E}(Y_k) = \frac{1}{p_k} = \frac{n}{n-k+1}$ (la relation est vraie pour $k=1$). Ainsi

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n n \frac{1}{n-k+1} = \sum_{k=1}^n \frac{n}{k} = nH_n.$$

(b) on a $H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$

(c) Finalement $\mathbb{E}(X) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln n$.

Exercice 31.14

1. La variable X suit une loi binomiale de paramètres (n, p) . C'est-à-dire $X(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$ et $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

2. (a) Soit $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Sous la condition $(X = i)$, la secrétaire rappelle $n-i$ correspondants lors de la seconde série d'appels et

$$\mathbb{P}(Y = k | X = i) = \begin{cases} \binom{n-i}{k} p^k (1-p)^{n-i-k} & \text{si } k \in \llbracket 0; n-i \rrbracket \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

(b) $Z(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$ et

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \mathbb{P}(Z = k) = \sum_{i=0}^k \mathbb{P}(X = i \cap Y = k-i) = \sum_{i=0}^k \mathbb{P}(Y = k-i | X = i) \mathbb{P}(X = i).$$

Soit $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. D'après les questions précédentes,

$$\mathbb{P}(Z = k) = \sum_{i=0}^k \binom{n-i}{k-i} \binom{n}{i} p^k (1-p)^{2n-k-i}.$$

$$\binom{n-i}{k-i} \binom{n}{i} = \frac{(n-i)!}{(n-k)!(k-i)!} \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{n!}{(k-i)!(n-k)!i!} = \frac{k!}{(k-i)!i!} \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{k}{i} \binom{n}{k}.$$

Ainsi $\mathbb{P}(Z = k) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k-i} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \left(\frac{1}{1-p}\right)^i$. D'après le binôme de Newton,

$$\mathbb{P}(Z = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k} \left(\frac{2-p}{1-p}\right)^k = \binom{n}{k} (p(2-p))^k (1-p)^{n-k}.$$

On vérifie que $1-p(2-p) = (1-p)^2$ et donc on peut conclure que Z suit une loi binomiale de paramètre $(n, p(2-p))$.

(c) D'après le cours, comme Z suit une loi binomiale de paramètre $(n, p(2-p))$, alors $\mathbb{E}(Z) = np(2-p)$ et $\mathbb{V}(Z) = np(2-p)(1-p(2-p)) = np(2-p)(p-1)^2$.

Exercice 31.15

1. Par récurrence simple, on a $\mathbb{P}(X = n) = \frac{p^n}{n!} \mathbb{P}(X = 0)$. Pour que X soit une variable aléatoire on doit avoir $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1$, ce qui donne

$$\mathbb{P}(X = 0) e^p = 1. \text{ Finalement, pour tout } n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = n) = \frac{p^n}{n!} e^{-p} \text{ (} X \text{ suit une loi de Poisson de paramètre } p \text{)}.$$

2. (a) On note $Y = \frac{1}{1+X_1}$. Puisque $0 \leq Y \leq 1$, Y est d'espérance finie et

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+k} \mathbb{P}(X_1 = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{1+k} \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1} = e^{-\lambda_1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda_1^k}{(k+1)!} = e^{-\lambda_1} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda_1^{k-1}}{k!} = \frac{e^{-\lambda_1}}{\lambda_1} (e^{\lambda_1} - 1) = \frac{1 - e^{-\lambda_1}}{\lambda_1}$$

(b) $X_1 + X_2$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$ (voir cours)

(c) On calcule :

$$\mathbb{P}_{X_1+X_2=n}(X_1 = k) = \frac{\mathbb{P}(X_1 = k, X_1 + X_2 = n)}{\mathbb{P}(X_1 + X_2 = n)} = \frac{\mathbb{P}(X_1 = k, X_2 = n-k)}{\mathbb{P}(X_1 + X_2 = n)} = \frac{\mathbb{P}(X_1 = k) \mathbb{P}(X_2 = n-k)}{\mathbb{P}(X_1 + X_2 = n)}$$

Cette probabilité est nulle si $k > n$. Lorsque $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on a

$$\mathbb{P}_{X_1+X_2=n}(X_1 = k) = \frac{e^{-\lambda_1} e^{-\lambda_2} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k}}{k!(n-k)!} \frac{n!}{(\lambda_1 + \lambda_2)^n e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}} = \frac{1}{(\lambda_1 + \lambda_2)^n} \binom{n}{k} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k}$$

remarque : la somme de ces probas donne $\frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{(\lambda_1 + \lambda_2)^n} = 1$

3. On a $\mathbb{E}(U) = V(U) = \lambda_1 + \lambda_2$, $\mathbb{E}(V) = V(V) = \lambda_2 + \lambda_3$. Par bilinéarité de la covariance et puisque les variables sont indépendantes,

$$\text{Cov}(X + Y, Y + Z) = \text{Cov}(X, Y) + \text{Cov}(X, Z) + \text{Cov}(Y, Y) + \text{Cov}(Y, Z) = \text{Cov}(Y, Y) = V(Y) = \lambda_2$$

Ainsi

$$\rho(U, V) = \frac{\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1 + \lambda_2} \sqrt{\lambda_2 + \lambda_3}} \in [0, 1]$$

Exercice 31.16

1. La loi conditionnelle de X sachant $N = k$ est une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. On a alors, pour $i \leq k$:

$$\mathbb{P}(X = i \cap N = k) = \mathbb{P}(X = i | N = k) \mathbb{P}(N = k) = \binom{k}{i} p^i q^{k-i} \times \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

On en déduit la loi de X :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = i) &= \sum_{k=i}^{+\infty} \binom{k}{i} p^i q^{k-i} \times \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = p^i e^{-\lambda} \sum_{k=i}^{+\infty} q^{k-i} \times \frac{\lambda^k}{(k-i)!} \\ &= \frac{(p\lambda)^i}{i!} e^{-\lambda} \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{(q\lambda)^{k-i}}{(k-i)!} = \frac{(p\lambda)^i}{i!} e^{-\lambda} e^{q\lambda} \\ &= \frac{(p\lambda)^i}{i!} e^{-p\lambda} \end{aligned}$$

Ainsi X suit une loi de Poisson de paramètre $p\lambda$. On a $\mathbb{E}(X) = V(X) = p\lambda$.

2. De la même manière, on montre que Y suit une loi de Poisson de paramètre $q\lambda$. On détermine alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = i \cap Y = j) &= \mathbb{P}(X = i \cap X + Y = i + j) = \mathbb{P}(X = i \cap N = i + j) \\ &= \binom{i+j}{i} p^i q^j \times \frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!} e^{-\lambda} \\ &= \frac{p^i q^j}{i! j!} \frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!} e^{-(p+q)\lambda} \\ &= \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = j) \end{aligned}$$

Les variables aléatoires sont indépendantes.

3. On a $\text{Cov}(X, N) = \text{Cov}(X, X + Y) = \text{Cov}(X, X) + \text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(X, X) = V(X)$ puisque X et Y sont indépendantes. On a donc $\text{Cov}(X, N) = p\lambda$. On a $\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{p\lambda}$ et $\sigma_N = \sqrt{\lambda}$. Finalement $\rho_{X,N} = \frac{p\lambda}{\sqrt{p\lambda} \sqrt{\lambda}} = \sqrt{p}$.

Exercice 31.17

1. On écrit formellement :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k | N = n) \mathbb{P}(N = n) \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} k \mathbb{P}(Y = k | N = n) \right) \mathbb{P}(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} k \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n = k) \right) \mathbb{P}(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}(X_1 + \dots + X_n) \mathbb{P}(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} n \mathbb{E}(X) \mathbb{P}(N = n) = \mathbb{E}(X) \mathbb{E}(N) \end{aligned}$$

la convergence étant assurée en partant de la fin (tous les termes sont positifs alors il suffit de pouvoir calculer la somme double d'une certaine façon).

2. Avec les mêmes calculs, on a $\mathbb{E}(Y^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left((X_1 + \dots + X_n)^2\right) \mathbb{P}(N = n)$. Pour Z une variable aléatoire réelle, on a $V(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - \mathbb{E}(Z)^2$, ainsi

$$\mathbb{E}\left((X_1 + \dots + X_n)^2\right) = V(X_1 + \dots + X_n) + \mathbb{E}(X_1 + \dots + X_n)^2.$$

Puisque les variables aléatoires sont mutuellement indépendantes, on a $V(X_1 + \dots + X_n) = nV(X)$ et $\mathbb{E}\left((X_1 + \dots + X_n)^2\right) = nV(X) + n^2\mathbb{E}(X)^2$. Cela donne

$$\mathbb{E}(Y^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(nV(X) + n^2\mathbb{E}(X)^2\right) \mathbb{P}(N = n) = \mathbb{E}(N)V(X) + \mathbb{E}(X)^2\mathbb{E}(N^2).$$

3. On simplifie

$$V(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = \mathbb{E}(N)V(X) + \mathbb{E}(X)^2\mathbb{E}(N^2) - \mathbb{E}(X)^2\mathbb{E}(N)^2 = \mathbb{E}(N)V(X) + \mathbb{E}(X)^2V(N).$$

4. On utilise le résultat précédent avec N suivant la loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$ (donc $\mathbb{E}(N) = \frac{n+1}{2}$ et $V(N) = \frac{n^2-1}{12}$) et tous les X_i suivant une loi de Bernoulli de paramètre p (avec $\mathbb{E}(X) = p$ et $V(X) = p(1-p)$). La variable aléatoire Y correspond au nombre de piles obtenus. On a

$$\mathbb{E}(Y) = p\frac{n+1}{2} \text{ et } V(Y) = p(1-p)\frac{n+1}{2} + p^2\frac{n^2-1}{12} = p\frac{n+1}{12}(6+p(n-7)).$$

Exercice 31.18

1. X_k est une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli. On a $\mathbb{P}(X_k = 1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$. Ainsi $\mathbb{E}(X_k) = \frac{1}{n}$ et $V(X_k) = \frac{n-1}{n^2}$.
2. si $i = j$ alors $\text{Cov}(X_i, X_i) = V(X_i)$. Sinon $X_i X_j$ prend uniquement les valeurs 0 et 1 donc suit une loi de Bernoulli avec $\mathbb{P}(X_i X_j = 1) = \mathbb{P}(X_i = 1, X_j = 1)$. Le nombre de permutation qui ont i et j comme point fixe est $(n-2)!$, donc $\mathbb{P}(X_i X_j = 1) = \frac{1}{n(n-1)}$. On a alors

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}(X_i X_j) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j) = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2(n-1)}$$

3. $N = \sum_{k=1}^n X_k$

4. On a directement $\mathbb{E}(N) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) = 1$. On a ensuite (avec $X_k^2 = X_k$)

$$V(N) = \text{Cov}\left(\sum_{k=1}^n X_k, \sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k^2) + \sum_{i \neq j} \text{Cov}(X_i, X_j) = 1 + n(n-1)\frac{1}{n^2(n-1)} = \frac{n+1}{n}$$

Exercice 31.19

1. La fonction génératrice d'une loi de Poisson de paramètre a est donnée par $G_X(t) = e^{a(t-1)}$ et

$$G_{3Y}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(3Y = n) t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(3Y = 3k) t^{3k} = G_Y(t^3) = e^{b(t^3-1)}$$

la fonction génératrice d'une somme de deux variables indépendantes et le produit des fonctions génératrices. Donc

$$G_Z(t) = e^{a(t^3+t-2)}$$

Puisque

$$G'_Z(t) = ae^{a(t^3+t-2)}(3t^2 + 1)$$

$$G''_Z(t) = ae^{a(t^3+t-2)}(6t + a(3t^2 + 1)^2)$$

$$\mathbb{E}(Z) = G'_Z(1) = 4a$$

$$V(Z) = G''_Z(1) + G'_Z(1) - G'_Z(1)^2 = 6a + 16a^2 + 4a - 16a^2 = 10a$$

2. Par linéarité et bilinéarité de l'espérance et de la variance, et comme $\text{Cov}(X, Y) = 0$,

$$\mathbb{E}(X + 3Y) = \mathbb{E}(X) + 3\mathbb{E}(Y) = 4a$$

$$V(X + 3Y) = V(X) + 6\text{Cov}(X, Y) + 9V(Y) = a + 9a = 10a$$

Exercice 31.20

1. Soit (x_1, \dots, x_{n-1}, F) un mot ne contenant pas deux piles consécutifs, le mot (x_1, \dots, x_{n-1}) ne contient pas deux piles consécutifs et se termine par P ou F , d'où $a_n = a_{n-1} + b_{n-1}$. De même si $m = (x_1, \dots, x_{n-1}, P)$, $x_{n-1} = F$ d'où $b_n = a_{n-1}$. On en déduit que $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ et comme $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, en posant $a_0 = a_1 = 1$, on reconnaît la suite de fibonacci. L'événement $X = 0$ correspond à un mot $(x_1, \dots, x_{n-2}, P, P)$ où (x_1, \dots, x_{n-2}, P) ne contient pas deux Pile. Cela donne

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{b_{n-1}}{2^n} = \frac{a_{n-2}}{2^n}$$

2.

$$F_n = A\phi^n + B\phi_2^n$$

où $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\phi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ d'où $F_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} A\phi^n$ et $R = 1/\phi$.

$$f(x) = 1 + x + \sum_{n=2}^{+\infty} (F_{n-1} + F_{n-2})x^n = 1 + x + x(f(x) - 1) + x^2 f(x)$$

d'où

$$f(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}$$

et donc

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{F_{n-2}}{2^n} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} F_n (1/2)^n = \frac{1}{4} f(1/2) = 1$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=2}^{+\infty} n \frac{F_{n-2}}{2^n} = \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2) \frac{F_n}{2^{n-1}}$$

Mais

$$f'(x) = \frac{2x+1}{(1-x-x^2)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} n F_n x^{n-1}$$

d'où $\mathbb{E}(X) = 6$.

Exercice 31.21

1. La série $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X = n)$ doit converger donc $|a/(a+1)| < 1$ et comme une probabilité est positive, $a \geq 0$. De plus,

$$1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = k(a+1)$$

d'où $a > 0$ et $k = \frac{1}{a+1}$.

$$G_X(t) = k \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{at}{a+1} \right)^n = \frac{1}{a+1-at}$$

2. Comme les variables sont indépendantes,

$$G_S(t) = G_X(t)^n = \frac{1}{(a+1-at)^n}$$

et on calcule

$$S'_G(t) = \frac{na}{(a+1-at)^{n+1}}$$

$$S''_G(t) = \frac{n(n+1)a^2}{(a+1-at)^{n+2}}$$

$$\mathbb{E}(S) = G'_S(1) = an \quad \mathbb{V}(S) = G''_S(1) + G'_S(1) - G'_S(1)^2 = na(a+1)$$

3. En posant $Y = X + 1$, $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et

$$\mathbb{P}(Y = n) = \mathbb{P}(X = n-1) = \frac{1}{a+1} \left(\frac{a}{a+1} \right)^{n-1} = q^{n-1} p$$

avec $p = \frac{1}{a+1}$. La variable Y suit donc une loi géométrique $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ d'où

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) - 1 = a$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Y) = \frac{q}{p^2} = a(a+1)$$

Ensuite, par linéarité de la variance et comme les variables sont indépendantes,

$$\mathbb{E}(S) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) = na$$

$$\mathbb{V}(S) = \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k) = na(a+1)$$

Exercice 31.22

1. on note $f_n(t) = e^{itx_n} \mathbb{P}(X = x_n)$. Chaque fonction f_n est continue sur \mathbb{R} et $|f_n(t)| = \mathbb{P}(X = x_n)$. Puisque $\sum \mathbb{P}(X = x_n)$ converge, $\sum f_n$ converge normalement sur \mathbb{R} et ϕ_X est définie et continue sur \mathbb{R} .
2. On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{int} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda e^{it})^n}{n!} = e^{-\lambda} \exp(\lambda e^{it}) = \exp(\lambda(e^{it} - 1))$$

3. puisque X admet un moment d'ordre 2, elle admet aussi un moment d'ordre 1 et les deux familles $(x_n \mathbb{P}(X = x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x_n^2 \mathbb{P}(X = x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ sont sommables. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$,

$$f_n'(t) = ix_n f_n(t), f_n''(t) = -x_n^2 f_n(t) \text{ et } |f_n'(t)| = |x_n| \mathbb{P}(X = x_n), |f_n''(t)| = |x_n^2| \mathbb{P}(X = x_n).$$

Les séries de fonctions $\sum f_n'$ et $\sum f_n''$ converge normalement sur \mathbb{R} et ϕ_X est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} avec, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_X'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} ix_n e^{itx_n} \mathbb{P}(X = x_n) \text{ et } \phi_X''(t) = - \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2 e^{itx_n} \mathbb{P}(X = x_n)$$

Notamment $\phi_X'(0) = i\mathbb{E}(X)$ et $\phi_X''(0) = -\mathbb{E}(X^2)$. Cela permet de retrouver $\mathbb{E}(X) = -i\phi_X'(0)$ et $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = -\phi_X''(0) + (\phi_X'(0))^2$.

Exercice 31.23

1. Soit $a \in]0, +\infty[$. Pour toute variable aléatoire X admettant un moment d'ordre 2, on a :

$$P\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}.$$

2. On pose $X = \frac{S_n}{n}$. Par linéarité de l'espérance et comme toutes les variables Y_i ont la même espérance, on a $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y_1)$. De plus, comme les variables sont mutuellement indépendantes, on a $V(X) = \frac{1}{n^2} V(S_n) = \frac{1}{n} V(Y_1)$. En appliquant 1. à X , on obtient le résultat souhaité.

3. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on considère la variable aléatoire Y_i valant 1 si la $i^{\text{ième}}$ boule tirée est rouge et 0 sinon. Elle suit une loi de Bernoulli de paramètre p avec $p = \frac{2}{5} = 0,4$. Les variables Y_i suivent la même loi, sont mutuellement indépendantes et admettent des moments d'ordre

2. On a, $\forall i \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(Y_i) = 0,4$ et $V(Y_i) = 0,4(1 - 0,4) = 0,24$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$. S_n représente le nombre de boules rouges obtenues au

cours de n tirages. Alors $T_n = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n}$ représente la proportion de boules rouges obtenues au cours de n tirages. On cherche à partir de combien de tirages on a $P(0,35 \leq T_n \leq 0,45) > 0,95$. Or

$$P(0,35 \leq T_n \leq 0,45) = P\left(0,35 \leq \frac{S_n}{n} \leq 0,45\right) = P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(Y_1)\right| \leq 0,05\right).$$

D'après la question précédente, $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(Y_1)\right| \geq 0,05\right) \leq \frac{0,24}{n(0,05)^2}$ et $P(0,35 \leq T_n \leq 0,45) \geq 1 - \frac{0,24}{n(0,05)^2}$. Il suffit alors pour répondre au problème de chercher à partir de quel rang n , on a $1 - \frac{0,24}{n(0,05)^2} \geq 0,95$. La résolution de cette inéquation donne $n \geq \frac{0,24}{0,05^3}$ c'est-à-dire $n \geq 1920$.

Exercice 31.24

1. soit $t > 0$ et $Y = \exp(tX)$. La variable aléatoire Y est bornée donc d'espérance finie et positive. On peut appliquer l'inégalité de Markov : $P(Y \geq e^{td}) \leq \frac{\mathbb{E}(Y)}{e^{td}}$. Or, la fonction $x \mapsto \exp(tx)$ est croissante puisque $t > 0$. On a donc $(X \geq d) = (\exp(tX) \geq \exp(td))$ et ainsi $P(Y \geq e^{td}) = P(X \geq d)$. Tout cela donne,

$$\forall t > 0, P(X \geq d) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{tX})}{e^{td}}$$

et donc

$$P(X \geq d) \leq \inf_{t>0} \frac{\mathbb{E}(e^{tX})}{e^{td}}.$$

2. On a (en posant $q = 1 - p$) :

$$\mathbb{E}(e^{tX}) = \sum_{k=0}^n e^{kt} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (pe^t + q)^n \text{ et } \frac{\mathbb{E}(e^{tX})}{e^{ant}} = \left(\frac{pe^t + q}{e^{at}}\right)^n = (pe^{(1-a)t} + qe^{-at})^n$$

Puisque $pe^{(1-a)t} + qe^{-at} \geq 0$ et que $u \mapsto u^n$ est croissante sur \mathbb{R}^+ , la borne inférieure est β^n où $\beta = \inf_{t>0} (pe^{(1-a)t} + qe^{-at})$. On étudie

donc $f : t \mapsto pe^{(1-\alpha)t} + qe^{-\alpha t}$ sur \mathbb{R}_+^* . On a

$$f'(t) = (1-\alpha)pe^{(1-\alpha)t} - \alpha(1-p)e^{-\alpha t} = e^{-\alpha t}((1-\alpha)pe^t - \alpha(1-p))$$

→ si $\alpha > 1$, alors la fonction f est décroissante sur \mathbb{R}_+^* et sa limite en $+\infty$ est nulle donc $\mathbb{P}(X_n \geq \alpha n) = 0$ (c'est assez normal, on n'avait pas besoin de tout ça pour le dire)

→ si $\alpha = 1$, alors la fonction f est décroissante sur \mathbb{R}_+^* et sa limite en $+\infty$ est p donc $\mathbb{P}(X_n \geq n) \leq p^n$ (on a $\mathbb{P}(X_n \geq n) = \mathbb{P}(X_n = n) = p^n$)

→ si $\alpha \in]0, 1[$: $f'(t) \geq 0$ si et seulement si $e^t \geq \frac{\alpha(1-p)}{(1-\alpha)p}$. Il reste à savoir si cette valeur est supérieure à 1 (pour savoir si $t > 0$). On a

$$\frac{\alpha(1-p)}{(1-\alpha)p} \geq 1 \Leftrightarrow \alpha(1-p) \geq (1-\alpha)p \Leftrightarrow \alpha \geq p$$

→ si $\alpha \in]0, p]$, le minimum est en 0, ce qui donne $\mathbb{P}(X_n \geq \alpha n) \leq 1$

→ si $\alpha \in]p, 1[$, alors on obtient le cas intéressant, $\mathbb{P}(X_n \geq \alpha n) \leq f(t_0)^n$ où $e^{t_0} = \frac{\alpha(1-p)}{(1-\alpha)p}$. Après simplification, on trouve

$$\mathbb{P}(X_n \geq \alpha n) \leq \left(\frac{1-p}{1-\alpha} \left(\frac{p(1-\alpha)}{(1-p)\alpha} \right)^\alpha \right)^n$$

remarque : on peut faire le lien avec la loi faible des grands nombres. Si $\alpha > p$, on peut écrire $\alpha = p + \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P}(S_n \geq n\alpha) = \mathbb{P}((S_n - np) \geq n\varepsilon) \leq \mathbb{P}(|S_n - np| \geq n\varepsilon) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right)$$

avec l'inégalité de Markov, on a obtenu une majoration en $\frac{1}{n^2}$. Ici on a amélioré en une majoration géométrique (S_n/n se concentre rapidement autour de l'espérance).

Exercice 31.25

1. On a $\mathbb{P}(Y \geq k) = \sum_{j=k}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = j)$. On calcule alors

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y \geq k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=k}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = j) = \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^j \mathbb{P}(Y = j) = \sum_{j=1}^{+\infty} j \mathbb{P}(Y = j) = \mathbb{E}(Y)$$

le calcul étant licite puisque la somme double finale existe (termes tous positifs ou nuls et théorème de sommation par paquets).

2. On réécrit $S_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X < k) = \sum_{k=1}^n 1 - \mathbb{P}(X \geq k) = n - \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X \geq k)$.

(a) puisque $\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X \geq k)$ admet une limite finie $\mathbb{E}(X)$ lorsque n tend vers $+\infty$, on en déduit que $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$, puis $S_n - n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \mathbb{E}(X)$ (qui est non nulle).

(b) On a alors $S_n - n + \mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq k) - \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X \geq k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq k)$. On doit majorer le reste d'une série convergente. D'après

l'inégalité de Markov, on a $\mathbb{P}(X \geq k) = \mathbb{P}(X^2 \geq k^2) \leq \frac{\mathbb{E}(X^2)}{k^2}$. Cela donne

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq k) \leq \mathbb{E}(X^2) \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Pour majorer ce reste, on peut utiliser une comparaison série-intégrale ou plus simplement l'inégalité $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, ce qui permet de majorer le reste par $\frac{1}{n}$. Finalement

$$0 \leq S_n - n + \mathbb{E}(X) \leq \frac{\mathbb{E}(X^2)}{n}.$$

On a bien $S_n = n - \mathbb{E}(X^2) + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 31.26

1. la fonction γ est continue, paire, négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ en $+\infty$ donc intégrable sur \mathbb{R} .

2. On note $U_n = S_n^p$. Si $x \in U_n(\Omega)$ alors on vérifie que $\mathbb{P}(U_n = x) = \mathbb{P}(U_n = -x) = \mathbb{P}(-U_n = x)$. On aura alors U_n et $-U_n$ qui suivent la même loi donc ont même espérance ce qui donnera $\mathbb{E}(U_n) = -\mathbb{E}(U_n)$ donc $\mathbb{E}(U_n) = 0$ (ce qui revient dans le calcul de l'espérance à

regrouper les termes opposés $x^p (U_n = x)$ et $-x^p (U_n = -x) = -x^p (U_n = x)$ et obtenir une somme nulle. Puisque p est impair, cela revient à montrer que $\mathbb{P}(S_n = y) = \mathbb{P}(S_n = -y) = \mathbb{P}(-S_n = y)$, c'est-à-dire que S_n et $-S_n$ ont même loi. Les vecteurs aléatoires (X_1, \dots, X_n) et $(-X_1, \dots, -X_n)$ ont même loi puisque pour $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in [-1, 1]^n$, $\mathbb{P}(X_1 = \varepsilon_1, \dots, X_n = \varepsilon_n) = \frac{1}{2^n} = \mathbb{P}(-X_1 = \varepsilon_1, \dots, -X_n = \varepsilon_n)$. Avec $f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n x_k$, on a $f(X_1, \dots, X_n) = S_n$ de même loi que $f(-X_1, \dots, -X_n) = -S_n$.

Finalement on a bien $\mathbb{E}(S_n^p) = 0$ si p est impair. Puisque $t \mapsto t^p \gamma(t)$ est intégrable sur \mathbb{R} et impaire, on a également $\int_{\mathbb{R}} t^p \gamma(t) dt = 0$.

3. il suffit de le prouver lorsque $Q = X^{2k}$ (puis utiliser la linéarité et la question précédente).

→ on note $I_k = \int_{\mathbb{R}} t^{2k} \gamma(t) dt$. On a $I_k = \left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1} \gamma(t) \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2k+1} \int_{\mathbb{R}} t^{2k+2} \gamma(t) dt$ donc $I_{k+1} = (2k+1)I_k$ avec $I_0 = 1$. Cela donne $I_k = (2k-1) \dots 3 \cdot 1 = \frac{(2k)!}{2^k k!}$.

→ on regarde le cas $Q = X^2$: on a $S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i, j \leq n} X_i X_j$ et $\mathbb{E}(S_n^2) = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \mathbb{E}(X_i X_j)$. Lorsque $i \neq j$, X_i et X_j sont indépendantes donc $\mathbb{E}(X_i X_j) = \mathbb{E}(X_i) \mathbb{E}(X_j) = 0$. De plus $\mathbb{E}(X_i^2) = \mathbb{E}(1) = 1$. Finalement $\mathbb{E}(S_n^2) = \frac{1}{n} \cdot n = 1$ et $I_1 = 1$.

→ cas $Q = X^4$. On a $I_2 = 3$. On a besoin de déterminer $\mathbb{E}(S_n^4)$. On note $T_n = \sqrt{n} S_n = X_1 + \dots + X_n$. On a $\mathbb{E}(S_n^4) = \frac{1}{n^2} \mathbb{E}(T_n^4)$. On détermine cette espérance par récurrence sur n . On a $T_{n+1} = T_n + X_{n+1}$ avec T_n et X_{n+1} indépendantes. Cela donne

$$T_{n+1}^4 = T_n^4 + 4X_{n+1}T_n^3 + 6X_{n+1}^2T_n^2 + 4X_{n+1}^3T_n + X_{n+1}^4$$

on a $\mathbb{E}(X_{n+1}T_n^3) = \mathbb{E}(X_{n+1})\mathbb{E}(T_n^3) = 0$ et de même $\mathbb{E}(X_{n+1}^3T_n) = 0$. On a également $X_{n+1}^2 = 1$. Il reste

$$\mathbb{E}(T_{n+1}^4) = \mathbb{E}(T_n^4) + 6\mathbb{E}(T_n^2) + 1 = \mathbb{E}(T_n^4) + 6n + 1$$

avec $\mathbb{E}(T_1^4) = 1$, par télescopage,

$$\mathbb{E}(T_n^4) - 1 = \sum_{k=1}^{n-1} (6k+1) = 3(n-1)n + n - 1 = 3n^2 - 2n + 1$$

Finalement $\mathbb{E}(T_n^4) = 3n^2 - 2n$ et $\mathbb{E}(S_n^4) = 3 - \frac{2}{n}$. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(S_n^4) = 3 = \int_{\mathbb{R}} t^4 \gamma(t) dt$.

→ cas général avec $Q = X^{2k}$: on peut essayer de généraliser le calcul précédent ou développer $(X_1 + \dots + X_n)^{2k}$, regrouper les termes, se dire que l'espérance d'un terme $X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$ est nulle dès que l'un des exposants est impair et simplifier les X_i^2 en 1... il faut compter combien de termes restent

Exercice 31.27

1. On a $(|S_n| > \alpha) = (S_n^2 \geq \alpha^2)$. L'inégalité de Markov peut s'appliquer à S_n^2 qui est positive (et d'espérance finie). Cela donne $\mathbb{P}(|S_n| > \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}(S_n^2)}{\alpha^2}$. Il reste à calculer $\mathbb{E}(S_n^2)$. On a

$$\mathbb{E}(S_n^2) = \mathbb{E}\left(\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)^2\right) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \mathbb{E}(X_i X_j)$$

On a $\mathbb{E}(X_i X_j) = \mathbb{E}(X_i) \mathbb{E}(X_j) = 0$ (indépendance et variables aléatoires centrées). On a donc $\mathbb{E}(S_n^2) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i^2) \leq \sigma^2$. Finalement

$$\mathbb{P}(|S_n| > \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2}$$

2. (a) les événements A_1, \dots, A_n sont deux à deux disjoints : si $i > j$ et $\omega \in A_i \cap A_j$ alors on a $\omega \in A_i$ donc $|S_i| > \alpha$ et $|S_j| \leq \alpha$ et on a $\omega \in A_j$ donc $|S_j| > \alpha$. Une seule des variables aléatoires T_i peut prendre la valeur 1. On a donc $\sum_{i=1}^n T_i$ qui ne prend que les valeurs 0 et 1 et

elle vaut 1 en ω lorsqu'il existe $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ telle $T_i(\omega) = 1$. La somme est donc la fonction indicatrice de l'union disjointe $A = \bigoplus_{i=1}^n A_i$. On vérifie que A est bien l'événement : $B = (\text{il existe } k \in \llbracket 1; n \rrbracket, |S_k| > \alpha)$. Chaque A_i est inclus dans B donc $A \subset B$. Réciproquement, si $\omega \in B$, en prenant le plus petit entier $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $|S_k(\omega)| > \alpha$, on a $\omega \in A_k$ donc $B \subset A$.

(b) Si on note $T = \sum_{i=1}^n T_i$, on a

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(T_i S_n^2) = \mathbb{E}(T S_n^2) \leq \mathbb{E}(S_n^2) \leq \sigma^2,$$

puisque $T \leq 1$ et $S_n^2 \geq 0$ donc $T S_n^2 \leq S_n^2$ (la majoration de $\mathbb{E}(S_n^2)$ est faite en première question).

(c) On regarde $T_k(S_n^2 - S_k^2)$. On a

$$S_n^2 - S_k^2 = 2(X_{k+1} + \dots + X_n)S_k + (X_{k+1} + \dots + X_n)^2 \text{ et } T_k(S_n^2 - S_k^2) = 2S_k T_k(X_{k+1} + \dots + X_n) + T_k(X_{k+1} + \dots + X_n)^2$$

Ainsi $\mathbb{E}(T_k S_n^2) - \mathbb{E}(T_k S_k^2) = 2\mathbb{E}(S_k T_k(X_{k+1} + \dots + X_n)) + \mathbb{E}(T_k(X_{k+1} + \dots + X_n)^2)$. Les variables aléatoires S_k et T_k ne dépendent que de X_1, \dots, X_k et donc sont indépendantes de X_{k+1}, \dots, X_n (en vrai c'est pénible à rédiger). On a donc $\mathbb{E}(S_k T_k(X_{k+1} + \dots + X_n)) = \mathbb{E}(S_k T_k)\mathbb{E}(X_{k+1} + \dots + X_n) = 0$. Finalement $\mathbb{E}(T_k S_n^2) - \mathbb{E}(T_k S_k^2) \geq 0$.

3. on remarque tout d'abord que $\mathbb{P}(B) = \mathbb{E}(T)$. On essaie d'enchaîner les différentes inégalités obtenues : en sommant les inégalités précédentes, on obtient

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{E}(T_k S_k^2) \leq \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(T_k S_n^2) \leq \sigma^2$$

De plus $T_k S_k^2 \geq \alpha^2 T_k$: si $T_k(\omega) = 0$, c'est immédiat et si $T_k(\omega) = 1$ alors $\omega \in A_k$ donc $|S_k(\omega)| > \alpha$ et $S_k^2(\omega) > \alpha^2$. On a donc

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{E}(T_k \alpha^2) \leq \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(T_k S_k^2) \leq \sigma^2$$

donc $\alpha^2 \mathbb{E}(T) \leq \sigma^2$ et $\mathbb{P}(B) \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2}$. Si on note B_n l'événement $(\exists k \in [1; n], |S_k| > \alpha)$ alors la suite est une suite croissante d'événement. La

réunion des B_n est l'événement $(\sup_{n \geq 1} |S_n| > \alpha)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(B_n) \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2}$.

Exercice 31.28

on commence par remplacer chaque X_i par $X_i - m = X_i - \mathbb{E}(X_i)$. Les variables deviennent centrées, on a $V_2 = \mathbb{E}(X_i^2)$ et $V_4 = \mathbb{E}(X_i^4)$ pour tout entier i . On note $S_n = X_1 + \dots + X_n$

1. on a $A_n^\varepsilon = \left(\left|\frac{1}{n} S_n\right| \geq \varepsilon\right) = (S_n^4 \geq (n\varepsilon)^4)$ et ainsi, par l'inégalité de Markov (S_n^4 est positive et d'espérance finie), on a $\mathbb{P}(A_n^\varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(S_n^4)}{n^4 \varepsilon^4}$. Il reste donc à calculer l'espérance de S_n^4 , ce qu'on fait par récurrence sur n :

$$S_{n+1}^4 = S_n^4 + 4X_{n+1}S_n^3 + 6X_{n+1}^2S_n^2 + 4X_{n+1}^3S_n + X_{n+1}^4$$

Puisque X_{n+1} et S_n sont indépendantes et que X_{n+1} est centrée, on obtient

$$\mathbb{E}(S_{n+1}^4) = \mathbb{E}(S_n^4) + 6\mathbb{E}(X_{n+1}^2)\mathbb{E}(S_n^2) + \mathbb{E}(X_{n+1})^4$$

On a $\mathbb{E}(S_n^2) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \mathbb{E}(X_i X_j)$ et $\mathbb{E}(X_i X_j) = \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j) = 0$ si $i \neq j$. Il vient donc $\mathbb{E}(S_n^2) = nV_2$ et

$$\mathbb{E}(S_{n+1}^4) = \mathbb{E}(S_n^4) + 6nV_2^2 + V_4$$

On a $\mathbb{E}(S_1^4) = V_4$. Par télescopage,

$$\mathbb{E}(S_n^4) - V_4 = \sum_{k=1}^{n-1} (6kV_2^2 + V_4) = 3n(n-1)V_2^2 + (n-1)V_4$$

et finalement $\mathbb{E}(S_n^4) = 3n(n-1)V_2^2 + nV_4$. Tout cela donne

$$\mathbb{P}(A_n^\varepsilon) \leq \frac{3(n-1)V_2^2 + V_4}{n^3 \varepsilon^4}$$

2. On a une majoration par un terme équivalent à C/n^2 . La série converge.

3. On note $B_p^\varepsilon = \bigcup_{n=p}^{+\infty} A_n^\varepsilon$. C'est une suite décroissante d'événement donc $\mathbb{P}\left(\bigcap_{p=1}^{+\infty} B_p^\varepsilon\right) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(B_p^\varepsilon)$. Or

$$\mathbb{P}(B_p^\varepsilon) \leq \sum_{n=p}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n^\varepsilon)$$

en tant que reste d'une série convergente, $\lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{n=p}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n^\varepsilon) = 0$ et finalement $\mathbb{P}\left(\bigcap_{p=1}^{+\infty} \bigcup_{n=p}^{+\infty} A_n^\varepsilon\right) = 0$.

Exercice 31.29

1. Si $k \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbf{P}(L_1 \geq k) = \mathbf{P}(X_1 = 1, \dots, X_k = 1) + \mathbf{P}(X_1 = 0, \dots, X_k = 0) = p^k + (1-p)^k$$

Par continuité décroissante, $\mathbf{P}(L_1 \geq k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(L_1 = +\infty)$, donc $\mathbf{P}(L_1 = +\infty) = 0$. Si $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{P}(L_1 = k) = \mathbf{P}(L_1 \geq k) - \mathbf{P}(L_1 \geq k+1) = (1-p)p^k + p(1-p)^k$$

On en déduit

$$\mathbf{E}(L_1) = \sum_{k=1}^{+\infty} (p(1-p)kp^{k-1} + p(1-p)k(1-p)^{k-1}) = \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p}$$

On a

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(L_1(L_1-1)) &= \sum_{k=2}^{+\infty} (p^2(1-p)k(k-1)p^{k-2} + p(1-p)^2k(k-1)(1-p)^{k-2}) \\ &= \frac{2p^2(1-p)}{(1-p)^3} + \frac{2p(1-p)^2}{p^3} = \frac{2p^2}{(1-p)^2} + \frac{2(1-p)^2}{p^2} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(L_1) &= \mathbf{E}(L_1(L_1-1)) + \mathbf{E}(L_1) - \mathbf{E}(L_1)^2 \\ &= \frac{p^2}{(1-p)^2} + \frac{(1-p)^2}{p^2} + \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p} - 2 \end{aligned}$$

2. Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(L_2 \geq \ell) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(L_2 \geq \ell, L_1 = k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} (\mathbf{P}(L_2 \geq \ell, L_1 = k, X_1 = 0) + \mathbf{P}(L_2 \geq \ell, L_1 = k, X_1 = 1)) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} (\mathbf{P}(X_1 = 0, \dots, X_k = 0, X_{k+1} = 1, \dots, X_{k+\ell} = 1) \\ &\quad + \mathbf{P}(X_1 = 1, \dots, X_k = 1, X_{k+1} = 0, \dots, X_{k+\ell} = 0)) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} ((1-p)^k p^\ell + p^k (1-p)^\ell) = p(1-p)^{\ell-1} + (1-p)p^{\ell-1} \end{aligned}$$

Par continuité décroissante $\mathbf{P}(L_2 \geq \ell) \xrightarrow{\ell \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(L_2 = +\infty)$, donc $\mathbf{P}(L_2 = +\infty) = 0$.

Si $\ell \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{P}(L_2 = \ell) = \mathbf{P}(L_2 \geq \ell) - \mathbf{P}(L_2 \geq \ell+1) = p^2(1-p)^{\ell-1} + (1-p)^2 p^{\ell-1}$$

On a

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(L_2) &= \sum_{\ell=1}^{+\infty} (p^2 \ell (1-p)^{\ell-1} + (1-p)^2 \ell p^{\ell-1}) = 2 \\ \mathbf{E}(L_2(L_2-1)) &= \sum_{\ell=2}^{+\infty} (p^2(1-p)\ell(\ell-1)(1-p)^{\ell-2} + (1-p)^2 p \ell(\ell-1)p^{\ell-2}) \\ &= \frac{2(1-p)}{p} + \frac{2p}{1-p} \end{aligned}$$

et

$$\mathbf{V}(L_2) = \frac{2(1-p)}{p} + \frac{2p}{1-p} - 2$$