CHAPITRE 27 - ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Exercice 27.4

- → L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est un espace affine de dimension 2.
- → On détermine les solutions de l'équation homogène facilement : $y(x) = (Ax+B)e^{-2x}$.
- → Pour déterminer les solutions de l'équations, on utilise la méthode de variation des constantes - on cherche y sous la forme $y(x) = A(x)f(x) + B(x)g(x)$ où $f(x) = xe^{-2x}$ et $g(x) = e^{-2x}$ avec la condition supplémentaire $A'(x)f(x) + B'(x)g(x) = 0$. On reporte, on trouve $A'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $B'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ puis
$$y(x) = \left(Ax + B + \operatorname{argsh}(x) - \sqrt{1+x^2}\right)e^{-2x}.$$

Exercice 27.5

1. $y(x) = Ax + B(1 - \frac{x}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|)$.
2. $y(x) = \dfrac{A\operatorname{sh}(x) + B\operatorname{ch}(x)}{x}$, solutions sur $\mathbb{R}$: $y(x) = A\dfrac{\operatorname{sh}(x)}{x}$
3. $y(x) = x^3(A\cos(x) + B\sin(x))$, solutions sur $\mathbb{R}$: espace de dimension 4.
4. $y(x) = A\operatorname{sh}(\frac{x^2}{2}) + B\operatorname{ch}(\frac{x^2}{2})$.
5. $y(x) = A\sin(\ln x) + B\cos(\ln x)$.
6. $y(x) = \dfrac{A\sin(x) + B\cos(x)}{x}$
7. $y(x) = \dfrac{A + Be^{-2x}}{x}$.

Exercice 27.6

Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ forment un système fondamental des solutions définies sur I de l'équation homogène $y'' + y = 0$. On sait alors que les solutions de l'équation complète sont de la forme $y\colon x \mapsto \lambda\cos x + \mu\sin x$ où λ et μ sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ telles que
$$\forall x \in I, \begin{cases} \lambda'(x)\cos x + \mu'(x)\sin x &= 0 \\ -\lambda'(x)\sin x + \mu'(x)\cos x &= \dfrac{\cos x}{\sin x} \end{cases}$$
On en déduit aisément $\lambda'(x) = -\cos x$ et $\mu'(x) = \dfrac{\cos^2 x}{\sin x} = -\sin x + \dfrac{1}{\sin x}$, d'où $\lambda(x) = -\sin x + a$ et $\mu(x) = \cos x + \ln\left(\tan\frac{x}{2}\right) + b$ où a et b sont deux constantes réelles.
Les solutions de (E) sont donc les fonctions y définies sur I par
$$y(x) = (\sin x)\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right) + a\cos x + b\sin x$$
où a et b sont deux constantes réelles.

Exercice 27.8

On note $f = z - y$. On a $f(0) = 0$ et $f' \leqslant a(x)f$. On a deux options
- → On note g la fonction telle que $f' - a(x)f = g$. Cette fonction est négative. On résout l'équation différentielle en fonction de g est on montre que $g \leqslant 0$ donne $f \leqslant 0$.
- → On note A une primitive de a sur $\mathbb{R}^+$. On a, pour tout $x \geqslant 0$,
$$(f'(x) - a(x)f(x))e^{-A(x)} \leqslant 0.$$
L'expression obtenue est la dérivée de $h : x \mapsto f(x)e^{-A(x)}$. Cette dernière fonction h est donc décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Or $h(0) = 0$, donc h est négative, ce qui donne $f \leqslant 0$.

Exercice 27.9

Posons $a = \|K\|$, et choisissons une base orthonormale directe $\mathscr{B} = (\mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k})$ telle que $\mathrm{k} = \frac{1}{a}K$. L'application $X \mapsto K \wedge X$ est une application linéaire dont la matrice, dans la base $\mathscr{B}$ est $\begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions X de $\mathbb{R}$ dans E avec $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et vérifiant $x' = -ay,\ y' = ax,\ z' = 0$. La fonction z est donc constante (les courbes intégrales sont situées dans des plans parallèles au plan xOy). Les relations $x' = -ay$ et $y' = ax$ montrent que x est de classe $\mathscr{C}^2$ et est solution de l'équation différentielle du second ordre $x'' = -a^2x$: il existe donc des constantes réelles A et B telles que $\forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = A\cos at + B\sin at = \sqrt{A^2+B^2}\cos(at+\varphi)$. On a alors $y(t) = -\frac{1}{a}x'(t) = \sqrt{A^2+B^2}\sin(at+\varphi)$. Les courbes intégrales sont donc des cercles d'axe Oz.

Exercice 27.10

1. On peut se ramener à une équation d'ordre 2 :
   → Le plus simple est d'arriver à A^2. Si X est solution alors $X' = AX$ d'où $X'' = AX' = A^2X = -X$. On a donc $X'' + X = 0$. On résout composante par composante (par exemple). Il existe donc deux vecteurs U et V de taille $2n$ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = U\cos(t) + V\sin t$.
   → Puisqu'on n'a pas raisonné par équivalence, on cherche parmi ces solutions lesquelles le sont vraiment. Si $X(t) = U\cos(t) + V\sin t$, alors $X'(t) = -U\sin(t) + V\cos t$ et $AX(t) = (AU)\cos t + (AV)\sin t$. Par indépendance linéaire des fonctions sinus et cosinus, c'est équivalent à $AU = V$ et $AV = -U$. Or $AU = V$ équivaut (en multipliant par A inversible car $A^2 = -I_{2n}$), $A^2U = AV$ donc $-U = AV$. Les deux conditions sont équivalentes.
   → Ainsi X est solution si et seulement s'il existe $U \in M_{2n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X(t) = U\cos t + AU\sin t = (\cos t.I_{2n} + \sin t.A)U$ (on retrouve un espace de solutions de dimension $2n$).
2. On peut utiliser plus simplement l'exponentielle. On vérifie par récurrence que $A^{2p} = (-1)^p I_{2n}$ et $A^{2p+1} = (-1)^p A$. On a alors
$$\exp(A) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} t^{2p} I_{2n} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} t^{2p+1} A = (\cos t) I_{2n} + (\sin t) A.$$
   Les solutions sont sont la forme $t \mapsto ((\cos t) I_{2n} + (\sin t) A)\, X_0$.

Exercice 27.12

1. Un système fondamental des solutions de l'équation homogène $y'' - y = 0$ est constitué des fonctions $x \mapsto \operatorname{ch} x$ et $x \mapsto \operatorname{sh} x$. On cherche une solution particulière par la méthode de variation des constantes. On cherche une solution sous la forme $y : x \mapsto u(x)\operatorname{ch} x + v(x)\operatorname{sh} x$ où u et v sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait le système
$$\begin{cases} u'(x)\operatorname{ch} x + v'(x)\operatorname{sh} x = 0 \\ u'(x)\operatorname{sh} x + v'(x)\operatorname{ch} x = g(x) \end{cases}.$$
   On en déduit que $u'(x) = -\operatorname{sh} x\, g(x)$ et $v'(x) = \operatorname{ch} x\, g(x)$. Ainsi, l'ensemble des solutions réelles de l'équation $y'' - y = g$ est l'ensemble des fonctions
$$y : x \mapsto -\operatorname{ch} x \int_0^x \operatorname{sh}(t)\, g(t)\, dt + \operatorname{sh} x \int_0^x \operatorname{ch}(t)\, g(t)\, dt + a\operatorname{ch} x + b\operatorname{sh} x$$
   où (a, b) appartient à $\mathbb{R}^2$. Cela peut se réécrire
$$y(x) = \int_0^x \operatorname{sh}(x-t) g(t)\, dt + a\operatorname{ch} x + b\operatorname{sh} x.$$
2. En particulier, lorsque g est la fonction définie sur $g(x) = \frac{2}{\operatorname{ch}^3 x}$, on a $\int_0^x \operatorname{sh}(t) g(t)\, dt = \left[-\frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}\right]_0^x = 1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = \tanh^2 x$, et $\int_0^x \operatorname{ch}(t) g(t)\, dt = [2\operatorname{th} t]_0^x = 2\operatorname{th} t$. Cela donne Alors $-\operatorname{ch} x \int_0^x \operatorname{sh}(t) g(t)\, dt + \operatorname{sh} x \int_0^x \operatorname{ch}(t) g(t)\, dt = \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch} x}$. L'ensemble des solutions réelles de l'équation $y'' - y = \frac{2}{\operatorname{ch}^3 x}$, est l'ensemble des fonctions $x \mapsto \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch} x} + a\operatorname{ch} x + b\operatorname{sh} x$ où (a, b) appartient à $\mathbb{R}^2$.
3. On note $y_0(x) = \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch} x}$. Considérons $z = f - y_0$ où f vérifie l'inéquation avec les conditions initiales. Alors $z(0) = z'(0) = 0$ et $z'' - z \geqslant 0$. Posons $g = z'' - z$. Alors z est solution de $z(0) = z'(0) = 0$ et $z'' - z = g$. On obtient alors $z(x) = \int_0^x \operatorname{sh}(x-t) g(t)\, dt$. Puisque $\operatorname{sh}(x-t)$ est du signe de $x - t$ et donc du signe de x, on a $z(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Cela donne le résultat.

Exercice 27.13

1. Soit f une solution bornée de (E), et $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$. On a alors $|f''| \leqslant M|q|$, ce qui montre que f'' est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Puisque $f'(x) = f'(0) + \int_0^x f''(u)\, du$, on en déduit que f' admet une limite finie ℓ en $+\infty$. Supposons $\ell \neq 0$, alors $f'(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} l$ et $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(u)\, du$ va tendre vers $\pm\infty$ en $+\infty$ (suivant le signe de ℓ).
2. $W = fg' - f'g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, et $W' = fg'' - f''g = -qfg + qfg = 0$. Ainsi W est constant.
3. Supposons toutes les solutions de (E) bornées. Soit (f, g) un système fondamental de solutions de (E). Posons $W = fg' - f'g$. W est une constante, et comme f et g sont bornées, f' et g' tendent vers 0 en $+\infty$. Il en résulte que $\lim_{x\to+\infty} f(x)g'(x) - f'(x)g(x) = 0$, et donc que $W = 0$, ce qui est absurde (le wronskien d'un système fondamental de solutions est non nul).

Exercice 27.14

1. (a) Si $y(x_0) = 0$ et $y'(x_0) = 0$, alors y est l'unique solution du problème de Cauchy associé et puisque la fonction nulle convient, la fonction y est identiquement nulle. On donc $y'(x_0) \neq 0$. Supposons $y'(x_0) > 0$. Puisque y' est continue, la fonction y' reste strictement positive sur un voisinage de x_0. Il existe $\alpha > 0$ tel que $y'(x) > 0$ sur $]x_0 - \alpha, a_0 + \alpha[$. La fonction y est donc strictement croissante sur cet intervalle

et ne s'annule qu'en x_0.

(b) Supposons que y admet un nombre infini de zéros dans $[a,b]$. On peut alors construire une suite x_n de zéros de y, deux à deux distincts et dans $[a,b]$. Puisque $[a,b]$ est compact, on peut extraire de (x_n) une suite convergente. On note $z_n = x_{\varphi(n)}$ les termes de cette suite extraite. Les termes sont toujours 2 à 2 distincts et $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \beta \in [a,b]$. Or, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $y(z_n)=0$ donc, par continuité de y, $y(\beta)=0$. Il existe alors $\alpha>0$ tel que $y(x)\neq 0$ si $0<|x-\beta|<\alpha$. Il n'y a donc aucun zéro de y dans $]\beta-\alpha,\beta[\cup]\beta,\beta+\alpha[$. Au maximum un seul terme de (z_n) vaut β donc, il existe n_0 tel que $\forall n\geqslant n_0$, $|z_n-\beta|\geqslant\alpha$. Cela contredit le fait que z_n converge vers β.

2. (a) Soit $W=\begin{vmatrix} y & z\\ y' & z'\end{vmatrix} = yz'-y'z$. On a $W' = yz''-y''z+(y'z'-y'z') = y(-pz'-q)-z(-py'-q) = -pW$. Le wronskien vérifie l'équation $W'+qW=0$. Si on note Q une primitive q sur $\mathbb{R}$, il existe $C\in\mathbb{R}$ tel que $W=C\exp(-Q)$.

   (b) Si y et z ont un zéro commun x_0, alors $W(x_0)=0$ donc W est identiquement nul et y et z sont proportionnelles. C'est donc exclu.

   (c) Soit α et β deux zéros consécutifs de y. La fonction y ne s'annule donc pas sur $]\alpha,\beta[$. On étudie $f=\frac{z}{y}$. Elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle et $z' = \dfrac{yz'-zy'}{y^2} = \dfrac{W_{y,z}}{y^2}$. Puisque W garde un signe constant, la fonction f est strictement monotone. Puisque les limites de f en α et β sont infinies (y est de limite nulle et z de limite finie non nulle), ces deux limites sont de signe opposé et f est une bijection de $]\alpha,\beta[$ sur $\mathbb{R}$. La fonction f admet donc une unique racine dans $]\alpha,\beta[$ si bien que z admet un unique zéro dans $]\alpha,\beta[$.

Exercice 27.17

1. On note $H(t)=\displaystyle\int_a^x v(t)y(y)\,dt$ et V la primitive de v qui s'annule en 0. On a $H'(x)=v(x)y(x)$. Puisque v est positive, on a

$$v(x)y(x)\leqslant v(x)\left(\lambda+H(x)\right),$$

ce qui donne, pour $x\in I$, $H'(x)-v(x)H(x)\leqslant\lambda v(x)$. On multiplie par $\exp\circ(-V)$ afin de faire apparaître la dérivée d'un produit. Pour $x\in I$,

$$\left(H'(x)-v(x)H(x)\right)\exp(-V(x))\leqslant\lambda v(x)\exp(-V(x)).$$

On intègre cette relation entre a et z, pour $z\in I$, cela donne (v est la dérivé de V)

$$\left[H(x)\exp(-V(x))\right]_a^z\leqslant\left[-\lambda\exp(-V(x))\right]_a^z.$$

On a $H(a)=V(a)=0$, ce qui donne

$$H(z)\exp(-V(z))\leqslant\lambda\left(1-\exp(-V(z))\right),$$

puis, en remultipliant par $\exp(V(x)$,

$$H(z)\leqslant\lambda\exp(V(z))-\lambda \text{ ou encore } H(z)+\lambda\leqslant\lambda\exp(V(z)).$$

L'inéquation de départ est $y(x)\leqslant\lambda+H(x)$, ce qui donne $y(x)\leqslant\lambda\exp\left(\displaystyle\int_a^x v(t)\,dt\right)$.

2. Afin de dériver, on développe $\sin(x-t)=\sin x\cos t-\sin t\cos x$, ce qui donne

$$g(x)=f(x)+\sin(x)\left(\int_0^x\varphi(t)f(t)\cos(t)\,dt\right)-\cos(x)\left(\int_0^x\varphi(t)f(t)\sin(t)\,dt\right).$$

C'est alors plus simple de dériver. On obtient

$$\begin{aligned}
g'(x) &= f'(x)+\cos(x)\left(\int_0^x\varphi(t)f(t)\cos(t)\,dt\right)+\sin(x)\left(\varphi(x)f(x)\cos(x)\right)\\
&\quad+\sin(x)\left(\int_0^x\varphi(t)f(t)\sin(t)\,dt\right)-\cos(x)\left(\varphi(x)f(x)\sin(x)\right)\\
&= f'(x)+\cos(x)\left(\int_0^x\varphi(t)f(t)\cos(t)\,dt\right)+\sin(x)\left(\int_0^x\varphi(t)f(t)\sin(t)\,dt\right)
\end{aligned}$$

On redérive pour obtenir

$$\begin{aligned}
g''(x) &= f''(x)-\sin(x)\left(\int_0^x\varphi(t)f(t)\cos(t)\,dt\right)+\cos(x)\left(\varphi(x)f(x)\cos(x)\right)\\
&\quad+\cos(x)\left(\int_0^x\varphi(t)f(t)\sin(t)\,dt\right)+\sin(x)\left(\varphi(x)f(x)\sin(x)\right)\\
&= f'(x)+\cos(x)\left(\int_0^x\varphi(t)f(t)\cos(t)\,dt\right)+\sin(x)\left(\int_0^x\varphi(t)f(t)\sin(t)\,dt\right)\\
&= f''(x)-\sin(x)\left(\int_0^x\varphi(t)f(t)\cos(t)\,dt\right)+\cos(x)\left(\int_0^x\varphi(t)f(t)\sin(t)\,dt\right)\\
&\quad+\varphi(x)f(x)
\end{aligned}$$

Il vient alors $g''(x)+g(x)=f''(x)+f(x)+\varphi(x)f(x)=f''(x)+(1+\varphi(x))f(x)=0$. La fonction g est donc combinaison de sinus et cosinus. Elle est bornée sur $\mathbb{R}$. Il existe un réel a tel que $|g|\leqslant a$. On a alors

$$f(x)=g(x)-\int_0^x\sin(x-t)\varphi(t)f(t)\,dt$$

ce qui donne, pour $x \geqslant 0$,

$$|f(x)| \leqslant a + \int_0^x |\sin(x-t)||\varphi(t)||f(t)|\,dt \leqslant a + \int_0^x |\varphi(t)||f(t)|\,dt.$$

On applique le lemme précédent avec $y = |f|$ et $v = |\varphi - \geqslant 0$. On obtient

$$|f(x)| \leqslant a\exp\left(\int_0^x |\varphi(t)|\,dt\right),$$

et puisque φ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$,

$$|f(x)| \leqslant a\exp\left(\int_0^{+\infty} |\varphi(t)|\,dt\right).$$

La fonction f est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 27.18

1. (a) Le polynôme de N est un diviseur de X^p puisque $N^p = 0$. Or X^{p-1} n'est pas annulateur donc le polynôme minimal de N est X^p. La matrice N n'a donc pas de polynôme annulateur non nul de degré inférieur ou égal à $p-1$. La famille $(I_n, N, N^2, \ldots, N^{p-1})$ est libre.
   (b) En utilisant le fait que $\exp(t\lambda I_n + tN) = \exp(t\lambda I_n).\exp(tN)$ (car I_n et N commutent), on a

$$\exp(t(\lambda I_n + N)) = \exp(t\lambda)\exp(tN) = \exp(t\lambda)\sum_{k=0}^{p-1}\frac{t^k}{k!}N^k = \sum_{k=0}^{p-1} e^{\lambda t}\frac{t^k}{k!}N^k.$$

2. (a) Le polynôme minimal de A a exactement comme racines complexes les valeurs propres de A. On a donc un polynôme minimal $P = (X-\lambda)^p$ pour un certain entier p. On a alors $(A - \lambda I_n)^p = 0$ donc N est nilpotent.
   (b) Les solutions sont sous la forme $X(t) = \exp(tA)X_0$ (où $X_0 = X(0)$), donc s'écrive, avec p l'indice de nilpotence de N,

$$X(t) = \exp(t(\lambda I_n + N))X_0 = \sum_{k=0}^{p-1} e^{\lambda t}\frac{t^k}{k!}N^k X_0.$$

   Considérons X_0 un vecteur qui n'est pas dans $\ker N^{p-1}$ (possible car $N^{p-1} \neq 0$). On a alors

$$\|X(t)\| \underset{t\to+\infty}{\sim} \left|e^{\lambda t}\frac{t^{p-1}}{(p-1)!}\right| \left\|N^{p-1}X_0\right\|.$$

   On a $\left|e^{\lambda t}\right| = \exp((Re(\lambda)t)$. Si $\Re(\lambda) \neq 0$, alors l'une des limites en $+\infty$ et $-\infty$ de $\|X(t)\|$ est infinie. On doit donc avoir pour commencer $\Re(\lambda) = 0$ et λ est imaginaire pur. On a alors

$$\|X(t)\| \underset{t\to+\infty}{\sim} \left|\frac{t^{p-1}}{(p-1)!}\right| \left\|N^{p-1}X_0\right\|.$$

   Pour que la norme reste bornée, on doit avoir $p = 1$. Ainsi λ est imaginaire pur et $(A - \lambda I_n)^1 = 0$, donc $A = \lambda I_n$.
3. (a) On note f l'endomorphisme canoniquement associé à A et $E = \mathbb{C}^n$. On note $F_k = \ker(\lambda_k \mathrm{Id} - f)^{m_k}$. Ce sous-espace est stable par f. On considère g_k l'endomorphisme induit par f sur F_k. Soit $z \in F_k$ et x la solution de $x' = g_k(x)$ avec $x(0) = z$. Cette fonction à valeurs dans F_k vérifie l'équation $x' = f(x)$ donc est bornée et ce, pour tout $z \in F_k$. L'endomorphisme g_k est exactement du type précédent, donc il existe $r_k \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda_k = ir_k$ et $m_k = 1$. De plus $E = \oplus_{k=1}^{\ell} F_k = \oplus_{k=1}^{\ell}\ker(f - \lambda_k \mathrm{Id}_E)$. L'endomorphisme f est diagonalisable à valeurs propres imaginaires pures. Pour la réciproque, si on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres (pas forcément distinctes de A) et $X_1, \ldots, X_n$ une base de vecteurs propres, toute solution de $X' = AX$ s'écrit $X(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k e^{\lambda_k t} X_k$. Puisque $\lambda_k \in i\mathbb{R}$, les solutions sont bien bornées (le module de $e^{\lambda_k t}$ est 1).
   (b) On dérive $\|X\|^2 = {}^tX.X$ et on tombe sur ${}^tX(t)(A + {}^tA)X(t) = 0$. La norme de toute solution est constante.
   (c) On en déduit que A est diagonalisable à valeurs propres imaginaires pures.

Exercice 27.21

a) Par hypothèse, $[A,B]$ commute avec A et donc avec tout polynôme en A. Or, $\mathbb{C}[A]$ est un fermé en tant que sous-espace vectoriel de dimension finie, donc $e^A \in \mathbb{C}[A]$. On en déduit donc que $[A,B]e^A = e^A[A,B]$. b) On sait que, pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, l'application $t \mapsto \exp(tM)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $t \mapsto M\exp(tM) = \exp(tM)M$. Donc $f : t \mapsto \exp(tA)B\exp(-tA)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée

$$t \mapsto \exp(tA)AB\exp(-tA) - \exp(tA)BA\exp(-tA) = \exp(tA)[A,B]\exp(-tA)$$

On déduit de la question précédente (on a également $e^{tA} \in \mathbb{C}[A]$) :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = [A,B]\exp(tA)\exp(-tA) = [A,B]$$

Comme $f(0) = B$, on obtient que, pour tout $t \in \mathbb{R}, e^{tA}Be^{-tA} = B + t[A,B]$. c) Ce résultat est connu sous le nom de formule de Glauber. C'est un cas particulier de la formule BCH (Baker-Campbell-Hausdorff). Elle généralise la formule connue pour e^Ae^B quand A et B commutent (i.e $[A,B] = 0$

). On pose $\Phi : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathscr{M}_n(\mathrm{C}) \\ t & \mapsto e^{tA}e^{tB} \end{cases}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\Phi'(t) = Ae^{tA}e^{tB} + e^{tA}Be^{tB}$$

$= A\Phi(t) + (B + t[A, B])e^{tA}e^{tB}$ d'après la question précédente

$$= (A + B + t[A, B])\Phi(t).$$

Or, si on pose maintenant $\Psi : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \\ t & \mapsto e^{tA+tB+\frac{t^2}{2}[A,B]} \end{cases}$. On peut lui appliquer le théorème $\mathscr{C}^1$ pour les séries de fonctions ; et comme

$$A + B + t[A, B] \quad \text{et} \quad tA + tB + \frac{t^2}{2}[A, B]$$

commutent, on obtient que Ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\Psi'(t) = (A + B + t[A, B])\Psi(t)$$

Ainsi, Φ et Ψ sont solutions de la même équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 De plus, $\Phi(0) = \Psi(0)$ donc, d'après le théorème de Cauchy, $\Phi = \Psi$. En particulier, $\Phi(1) = \Psi(1)$, ce qui est le résultat demandé. d) On suppose $[A, B] \neq 0$. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que $C = \alpha A + \beta B + \gamma[A, B] = 0$.Par bilinéarité du crochet, il vient $0 = [C, B] = \alpha[A, B]$, donc $\alpha = 0$. De même, $0 = [A, C] = \beta[A, B]$, donc $\beta = 0$. Et finalement $\gamma = 0$. Ainsi $(A, B, [A, B])$ est libre. Donc $\dim \mathrm{Vect}(A, B, [A, B]) = 3$. e) Soient M et M' dans V. Ils s'écrivent :

$$M = \alpha A + \beta B + \gamma[A, B] \text{ et } M' = \alpha' A + \beta' B + \gamma' [A, B] \ ,$$

où $\left(\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'\right) \in \mathbb{C}^6$. Par bilinéarité du crochet $\left[M, M'\right] = \left(\alpha\beta' - \beta\alpha'\right)[A, B]$; comme A et B commutent avec $[A, B]$, on vérifie ainsi que M et M' commutent avec $\left[M, M'\right]$. On peut alors appliquer le résultat de la question c) :

$$e^M e^{M'} = e^{M+M'+\frac{1}{2}[M,M']} \ .$$

On a supposé $M, M' \in V$; et d'après l'expression ci-dessus $\left[M, M'\right] \in V$ également. Finalement $e^M e^{M'} = e^N$ avec $N \in V$.