CHAPITRE 26 - FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Exercice 26.1

On note $f : x \mapsto (f_1(x),\dots,f_n(x))$ et $g : (x_1,\dots,x_n) \mapsto \big(g_1(x_1,\dots,x_n),\dots,g_p(x_1,\dots,x_n)\big)$. On a alors

$$g\circ f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^p \\ x & \mapsto & \big(g_1(f_1(x),\dots,f_n(x)),\dots,g_p(f_1(x),\dots,f_n(x))\big)\end{array}\right.$$

D'après la règle de la chaîne, on a, pour tout $i \in [\![1\,;k]\!]$,

$$(g\circ f)_i'(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k'(x)\frac{\partial g_i}{\partial x_k}(f_1(x),\dots,f_n(x))$$

où $(g\circ f)_i$ désigne la i-ème composante de $g\circ f$.

Exercice 26.2

1. les fonctions polynomiales $(x,y)\mapsto 4xy(x^2-y^2)$ et $(x,y)\mapsto x^2+y^2$ sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2\setminus(0,0)$ et x^2+y^2 ne s'y annule pas. Par opérations usuelles, f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur le domaine.
2. Pour tout $(x,y)\neq(0,0)$, on a
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(4x^3-12xy^2)(x^2+y^2)-8xy^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$
et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \dfrac{4x^5}{x^4} = 4x$. Par définition,
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0.$$
3. On a alors
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(h,0)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4h}{h} = 4.$$
Un calcul similaire donne $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) = -4$. La fonction n'est donc pas de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ (sinon on pourrait permuter l'ordre de dérivation).

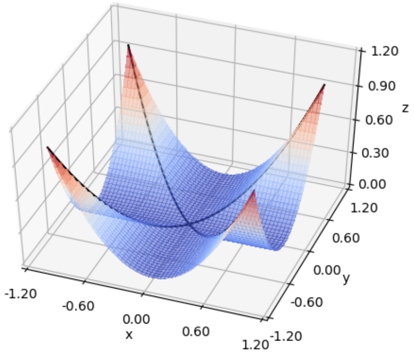
Exercice 26.3

1. L'application va bien de U dans U et elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$. Soit $(u,v)\in U$. On résout $\varphi(x,y)=(u,v)$:
$$\left\{\begin{array}{ccc} \dfrac{y}{x} & = & u \\ x^2+y^2 & = & v\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} y & = & ux \\ x^2(1+u^2) & = & v\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & = & \sqrt{\dfrac{v}{1+u^2}} \\ y & = & u\sqrt{\dfrac{v}{1+u^2}}\end{array}\right.$$
les équivalences sont obtenues puisque tous les termes sont strictement positifs. L'application est bijective, sa réciproque est
$$\varphi^{-1} : \left\{\begin{array}{ccc} U & \to & U \\ (u,v) & \mapsto & \left(\sqrt{\dfrac{v}{1+u^2}},u\sqrt{\dfrac{v}{1+u^2}}\right)\end{array}\right.$$
L'application φ^{-1} est également de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur U.
2. On a
$$\begin{array}{ccc} \dfrac{\partial f}{\partial x} & = & \dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial g}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2}\dfrac{\partial g}{\partial u}+2x\dfrac{\partial g}{\partial v} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} & = & \dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial g}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial g}{\partial u}+2y\dfrac{\partial g}{\partial v}\end{array}$$
ce qui donne
$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y} = 2(x^2+y^2)\frac{\partial g}{\partial v} = 2v\frac{\partial g}{\partial v}$$
On est donc amené à résoudre $2v^2\dfrac{\partial g}{\partial v} = \lambda g$ soit $\dfrac{\partial g}{\partial v} = \dfrac{\lambda}{2v}g$ sur U. Cela donne $g(u,v) = A(u)\exp(\frac{\lambda}{2}\ln v) = A(u)v^{\lambda/2}$. Cela donne
$$f(x,y) = A\left(\frac{y}{x}\right)(x^2+y^2)^{\frac{\lambda}{2}}.$$
Si f est $\mathscr{C}^2$ sur U, alors $y\mapsto f(1,y) = A(y)(1+y^2)^{\lambda/2}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $A(y) = f(1,y)(1+y^2)^{-\lambda/2}$ donc A est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Réciproquement sur A est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ alors f l'est sur U.

Exercice 26.4

1. Sur les ouverts définis par les relations $|x| < |y|$ et $|x| > |y|$ la fonction est continue. Soit $a \in \mathbb{R}$. On s'intéresse à la continuité de f en (a, a). On a $f(a, a) = a^2$. On propose deux solutions (on peut mélanger leurs idées) l'une basée sur les suites, l'autre sur des majorations :
   - → Soit (x_n, y_n) une suite qui converge vers (a, a). On a $f(x_n, y_n) = x_n^2$ si $x_n^2 < y_n^2$ et $f(x_n, y_n) = y_n^2$ si $y_n^2 \leqslant x_n^2$. On peut remarquer que $f(x_n, y_n) = \min(x_n^2, y_n^2)$. Puisque $\min(x, y) = \dfrac{x + y - |x - y|}{2}$, on a $f(x_n, y_n) = \dfrac{x_n + y_n - |x_n - y_n|}{2}$ qui tend vers $2a^2/2 = a^2$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   - → Soit (x, y) proche de (a, a). On peut supposer que $|x| \leqslant 1 + |a|$ et de même pour y. Si $|x| < |y|$, alors on a $|f(x, y) - f(a, a)| = |x^2 - a^2| = |x - a||x + a| \leqslant (1 + 2|a|)|x - a|$. On a une majoration similaire pour $f(x, y)$ si $|x| \leqslant |y|$. On a alors $|f(x, y) - f(a, a)| \leqslant (1 + 2|a|)\max(|x - a|, |y - a|) \leqslant (1 + 2|a|)(|x - a| + |y - a|)$ et ainsi la limite est nulle en (a, a).

2. On a f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ privé des droites $y = \pm x$. On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x$ si $|x| < |y|$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ si $|x| \geqslant |y|$. Notamment en (a, a) on obtient des limites différentes suivant comment on se rapproche de a. Par exemple si $a > 0$, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a + h, a) = 0$ si $h > 0$ et $2(a + h)$ si $h > 0$. Les limites en 0 à doite et à gauche (par rapport à h) sont différentes.



Exercice 26.5

On pose $\psi(x) = \|x\|^2$ et $\varphi(x) = 1/\psi(x)$. Comme $\psi(x + h) = \psi(x) + 2\langle x, h\rangle + \|h\|^2$, ψ est différentiable, et $d\psi(x)(h) = 2\langle x, h\rangle$. Il en résulte que φ est différentiable, et on a pour tout x non nul et $h \in E$, $d\varphi(x)(h) = -\dfrac{d\psi(x)(h)}{\psi(x)^2} = -\dfrac{2\langle x, h\rangle}{\|x\|^4}$.

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \varphi(x+h)\,(x+h) = (\varphi(x) + d\varphi(x)(h) + o(h))(x+h) \\ &= f(x) + \underbrace{d\varphi(x)(h)x + \varphi(x)h}_{\text{linéaire par rapport à } h} + o(h) \end{aligned}$$

Il en résulte que f est différentiable et $df(x)(h) = d\varphi(x)(h)x + \varphi(x)h$, d'où

$$\forall x \in E \setminus \{0\},\ \forall h \in E,\ df(x)(h) = -\frac{2\langle x, h\rangle\, x}{\|x\|^4} + \frac{h}{\|x\|^2}.$$

Exercice 26.7

1. On applique le théorème de dérivabilité sous le signe somme pour obtenir $M'(r) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta)\, d\theta$.

2. dérivation composée

3. On note $h(r) = rM'(r) = \displaystyle\int_0^{2\pi} r\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta)\, d\theta$. On montre comme à la première question que

$$h'(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial g}{\partial r}\right)(r, \theta)\, d\theta = -\frac{1}{r}\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta)\, d\theta = -\frac{1}{r}\left[\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta)\right]_0^{2\pi} = 0$$

   par périodicité des fonctions de θ.

4. Ainsi h est constante. Puisque f est continue en 0, on a $rM'(r) = h(0) = 0$ pour tout r. On en déduit que M est constante. Or $M(0) = 2\pi f(0, 0)$. On trouve notamment, pour tout $r > 0$,

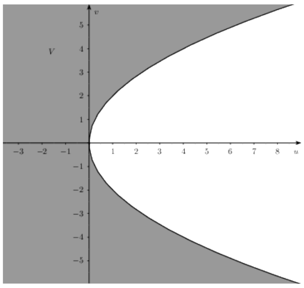
$$f(0, 0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(r, \theta)\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, d\theta.$$

Exercice 26.8

1. On démontre par récurrence sur k que $(M+H)^k = M^k + \sum_{i=0}^{k-1} M^i HM^{k-i-1} + O(\|H\|^2)$. On utilise ensuite la linéarité de la trace et la propriété $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ pour en déduire que l'application $f_k : M \mapsto \operatorname{tr}(M^k)$ est différentiable et que $df_k(M)(H) = k\operatorname{tr}(HM^{k-1})$. Il en résulte que f est différentiable, et que $\forall M, H, df(M)(H) = (k\operatorname{tr}(HM^{k-1}))_{1\leqslant k\leqslant n}$.
2. Soit p le degré du polynôme minimal de M (noté μ_M). On sait par le théorème de Cayley-Hamilton que $p \leqslant n$ et que $\forall k \geqslant p, M^k \in \operatorname{Vect}(I,\dots,M^{p-1})$. On pose $\varphi_k(H) = k\operatorname{tr}(HM^{k-1})$. Les formes linéaires $\varphi_{p+1},\dots,\varphi_n$ sont donc combinaisons linéaires de $(\varphi_1,\dots,\varphi_p)$. Supposons une relation de liaison de la forme $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i\varphi_i = 0$. On a alors $\forall H \in M_n(\mathbb{R}), \operatorname{tr}(H(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i M^{i-1})) = 0$. En choisissant successivement pour H les matrices élémentaires E_{ij}, on en déduit que $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i M^{i-1} = 0$ donc tous les α_i sont nuls, car le polynôme minimal de M est de degré p. On sait que si les formes linéaires $(\varphi_1,\dots,\varphi_p)$ sont indépendantes, alors l'application $H \mapsto (\varphi_1(H),\dots,\varphi_p(H))$ est surjective, donc de rang p, donc son noyau est de dimension $n^2 - p$. Or son noyau est le même que celui de $df(M)$, donc $df(M)$ est également de rang p.

Exercice 26.9

1. Soit $(x, y) \in U$. On pose $(u, v) = \phi(x, y)$, de sorte que x et y sont les racines du trinôme $X^2 - vX + u$, dont le discriminant $v^2 - 4u$ est strictement positif. On pose $V = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2,\ v^2 - 4u > 0\}$. Il s'agit de l'extérieur de la parabole d'équation $v^2 - 4u = 0$.



   Soit $(u, v) \in V$. On note x et y les racines (distinctes) du trinôme précédent, x étant la plus grande, ce qui entraîne que $(u, v) = \phi(x, y)$. On en déduit que ϕ est une bijection de U sur V. Le jacobien de ϕ en (x, y) est égal à $\begin{vmatrix} y & x \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = y - x < 0$. Il ne s'annule pas sur U, donc ϕ est un $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme de U sur V.
2. On pose $g = f \circ \phi^{-1}$, de sorte que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur V si, et seulement si, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U. On a alors $f(x, y) = g(xy, x+y)$. Par la formule de dérivation composée, on obtient pour $(x, y) \in U$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= y\frac{\partial g}{\partial u}(xy, x+y) + \frac{\partial g}{\partial v}(xy, x+y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= x\frac{\partial g}{\partial u}(xy, x+y) + \frac{\partial g}{\partial v}(xy, x+y) \end{aligned}$$

   L'équation $(*)$ équivaut à $(y - x)\frac{\partial g}{\partial u} + 3(x - y)g = 0$, d'où $\frac{\partial g}{\partial u} = 3g$.
3. On résout l'équation ci-dessus à v fixé : il existe un réel $A(v)$ tel que pour tout réel u tel que $(u, v) \in V$, on a $g(u, v) = A(v)e^{3u}$. Pour montrer que A est bien de classe $\mathscr{C}^1$, on écrit la relation précédente pour $u = -1$ (ce qui permet d'obtenir toutes les valeurs de v - voir dessin ci-dessus), ce qui donne, pour tout $v \in \mathbb{R}$, $g(-1, v) = A(v)e^{-3}$, c'est-à-dire $A(v) = g(-1, v)e^3$. La fonction A est donc $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On en déduit que les solutions de $(*)$ sont les fonctions de la forme

$$(x, y) \mapsto A(x + y)e^{3xy} \text{ où } A \text{ décrit } \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

Exercice 26.10

1. on vérifie les différentes propriétés nécessaires :
   - → les ensembles sont ouverts en tant qu'image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R}_+^*$ par les applications continues sur $\mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto y - x$ et $(u, v) \mapsto u + 2v^2$.
   - → L'application est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.
   - → elle est à valeurs dans V : soit $(u, v) = \varphi(x, y)$, on a $u + 2v^2 = x^2 - 2xy - y^2 + 2y^2 = (x - y)^2 > 0$.
   - → l'application est bijective : soit $(u, v) \in V$, on cherche $(x, y) \in U$ tel que $(u, v) = \varphi(x, y)$. Cela revient à résoudre

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2 - 2xy - y^2 &=& u \\ y &=& v \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x^2 - 2xv - (v^2 + u) &=& 0 \\ y &=& v \end{array}\right.$$

     On résout l'équation du second degré. Son discriminant est $\Delta = 4v^2 + 4(v^2 + u) = 4(u + 2v^2) > 0$. On obtient deux solutions $x =$

$v \pm \sqrt{u+2v^2}$. Puisque $y = v$, il n'y a qu'une seule solution avec $x < y$, à savoir $x = v - \sqrt{u+2v^2}$. On a donc $\varphi^{-1}(u,v) = (v - \sqrt{u+2v^2}, v)$. Cette application est $\mathscr{C}^1$ sur V (puisque $u+2v^2$ y est strictement positif).

2. On pose $g = f \circ \varphi^{-1}$ sur V. On a $f = g \circ \varphi$ sur U. On a alors

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}(2x-2y) + \frac{\partial g}{\partial v} \times 0 = 2(x-y)\frac{\partial g}{\partial u} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u}(-2x-2y) + \frac{\partial g}{\partial v} \times 1 = -2(x+y)\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}$$

On a ensuite $(x+y)\frac{\partial f}{\partial x} + (x-y)\frac{\partial f}{\partial y} = (x-y)\frac{\partial g}{\partial v}$, c'est-à-dire, pour tout $(x,y) \in U$,

$$(x+y)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + (x-y)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x-y)\frac{\partial g}{\partial v}\left(\varphi(x,y)\right).$$

L'équation est équivalente à, pour tout $(u,v) \in V$, $\frac{\partial g}{\partial v} = 0$. Pour finir la résolution, on regarde le domaine V - son intersection avec $u = u_0$donne soit une droite si $u \geqslant 0$, soit deux demi-droites si $u < 0$ - cela donne une solution sous la forme $g(u,v) = A_k(u)$ avec différentes fonctions A_k suivant les domaines.

Exercice 26.12

→ On s'intéresse à $\varphi : (u,v) \mapsto (x = u^2+v^2, y = u+v)$: on a $2x - y^2 = u^2+v^2-2uv = (u-v)^2$ et cette quantité est strictement positive (pour être dans V) si $u \neq v$. On cherche un antécédent à $(x,y) \in V$. On résout $(x = u^2+v^2, y = u+v)$ soit $(v = y-u, 2u^2-2uy+y^2-x = 0)$. Le discriminant est $\Delta = 4(2x-y^2) > 0$ ce qui donne deux solutions pour u et deux couples possibles pour (u,v) : l'un est $\left(\frac{y+\sqrt{2x-y^2}}{2}, \frac{y-\sqrt{2x-y^2}}{2}\right)$ et l'autre est le couple symétrique $\left(\frac{y-\sqrt{2x-y^2}}{2}, \frac{y+\sqrt{2x-y^2}}{2}\right)$. Par rapport à la conditon $u \neq v$, on se rend compte que l'un des couples est dans le domaine $u > v$ et l'autre dans le domaine $u > v$. On choisit l'un des deux (les calculs suivants seront les mêmes) par exemple $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2, u > v\}$. Les applications φ et φ^{-1} sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur U et V (respectivement).

→ On pose $g = f \circ \varphi$. Afin de déterminer les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}$ et autres, on utilise la matrice jacobienne et surtout son inverse. On a

$$J_\varphi = \begin{pmatrix} 2u & 2v \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$J_{\varphi^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = (J_\varphi)^{-1} = \frac{1}{2(u-v)}\begin{pmatrix} 1 & -2v \\ -1 & 2u \end{pmatrix}$$

On calcule les dérivées :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}.\frac{1}{2(u-v)} - \frac{\partial g}{\partial v}.\frac{1}{2(u-v)} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u}.\frac{-v}{u-v} - \frac{\partial g}{\partial v}.\frac{u}{u-v}$$

puis

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial g}{\partial u}.\frac{1}{2(u-v)} - \frac{\partial g}{\partial v}.\frac{1}{2(u-v)}\right)\frac{1}{2(u-v)} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial g}{\partial u}.\frac{1}{2(u-v)} - \frac{\partial g}{\partial v}.\frac{1}{2(u-v)}\right)\frac{-1}{2(u-v)} \\
&= \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}.\frac{1}{2(u-v)} + \frac{\partial g}{\partial u}.\frac{-1}{2(u-v)^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}.\frac{-1}{2(u-v)} + \frac{\partial g}{\partial v}.\frac{1}{2(u-v)^2}\right)\frac{1}{2(u-v)} \\
&+ \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}.\frac{1}{2(u-v)} + \frac{\partial g}{\partial u}.\frac{1}{2(u-v)^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}.\frac{-1}{2(u-v)} + \frac{\partial g}{\partial v}.\frac{-1}{2(u-v)^2}\right)\frac{-1}{2(u-v)} \\
&= \frac{1}{4(u-v)^2}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{1}{4(u-v)^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}\frac{1}{2(u-v)^2} - \frac{1}{2(u-v)^3}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{1}{2(u-v)^3}\frac{\partial g}{\partial v}
\end{aligned}$$

On a de même

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-v}{2(u-v)^2}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - \frac{u}{2(u-v)^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}\frac{u+v}{2(u-v)^2} + \frac{u+v}{2(u-v)^3}\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{u+v}{2(u-v)^3}\frac{\partial g}{\partial v}$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{v^2}{(u-v)^2}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{u^2}{(u-v)^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}\frac{-2uv}{(u-v)^2} - \frac{u^2+v^2}{(u-v)^3}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{u^2+v^2}{(u-v)^3}\frac{\partial g}{\partial v}$$

On calcule alors l'ensemble en remplaçant $y^2 - x$ par $2uv$:

$$\begin{aligned}
&2(y^2-x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2y\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-y^2+x\\
=\ &\frac{1}{4(u-v)^2}\left(4uv-4v(u+v)+4v^2\right)\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}+\frac{1}{4(u-v)^2}\left(4uv-4u(u+v)+4u^2\right)\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}+\frac{1}{2(u-v)^2}\left(-4uv+2(u+v)^2-4uv\right)\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}\\
+\ &\frac{1}{2(u-v)^3}\left(-4uv+2(u+v)^2-2(u^2+v^2)\right)\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{1}{2(u-v)^3}\left(4uv-2(u+v)^2+2(u^2+v^2)\right)\frac{\partial g}{\partial v}-2uv\\
=\ &\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}-2uv
\end{aligned}$$

On est donc amené à résoudre $\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}=2uv$ sur U (qui est convexe). Cela donne $\frac{\partial g}{\partial v}=u^2v+a(v)$ et $g(u,v)=\frac{1}{2}u^2v^2+A(v)+B(u)$.
remarque : on peut vérifier le calcul en dérivant dans l'autre sens (maintenant qu'on a le résultat) :

$$\frac{\partial g}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}.2u+\frac{\partial f}{\partial y}\qquad\text{et}\qquad\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}=2u\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.2v+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}.1\right)+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}.2v+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.1\right)=4uv\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2(u+v)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

ce qui redonne bien $\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}=2(y^2-x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2y\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Exercice 26.13

1. La racine carrée est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par théorème de composition, f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$. En dérivant deux fois par rapport à x_i, on obtient $\frac{\partial f}{\partial x_i}=\frac{x_i}{r}g'(r)$, et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}=\left(\frac{1}{r}-\frac{x_i}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x_i}\right)g'(r)+\frac{x_i^2}{r^2}g''(r)=\frac{r^2-x_i^2}{r^3}g'(r)+\frac{x_i^2}{r^2}g''(r).$$

   En sommant pour i variant de 1 à n, on a alors $\Delta f=\frac{n-1}{r}g'(r)+g''(r)$.

2. $\Delta f=0$ si, et seulement si, g' est solution de l'équation linéaire $y'+\frac{n-1}{r}y=0$, c'est-à-dire $g'(r)=\frac{A_1}{r^{n-1}}$ (avec $A_1\in\mathbb{R}$), d'où finalement $g(r)=\frac{A}{r^{n-2}}+B$ si $n\geqslant 3$ et $g(r)=A\ln r+B$ si $n=2$ (où A et B sont deux constantes réelles).

Exercice 26.14

1. Soit $(x,y)\in U$, et $\psi:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $\psi(t)=f(tx,ty)$. Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ et $\psi'(t)=x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)+y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)$. On en déduit que si $f\in\ker\Phi$, alors ψ' est la fonction nulle, donc ψ est constante. En particulier, $\psi(1)=\psi(1/x)$, d'où $f(x,y)=f(1,y/x)$. En posant pour tout $t>0$, $h(t)=f(1,t)$, la fonction h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f(x,y)=h(y/x)$ pour tout $(x,y)\in U$. Réciproquement, on vérifie que de telles fonctions conviennent. Finalement, $\ker\Phi$ est l'ensemble des fonctions de la forme $(x,y)\mapsto h(y/x)$ où $h\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$.

2. Supposons que f est homogène de degré α. On dérive par rapport à t l'égalité $f(tx,ty)=t^\alpha f(x,y)$, ce qui donne $x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)+y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)=\alpha t^{\alpha-1}f(x,y)$. En prenant $t=1$, on en déduit que $\Phi(f)=\alpha f$. Supposons que $\Phi(f)=\alpha f$. On pose $\varphi(t)=t^{-\alpha}f(tx,ty)$. La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a

$$\begin{aligned}
\varphi'(t)&=-\alpha t^{-\alpha-1}f(tx,ty)+t^{-\alpha}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)+y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)\right)\\
&=(-\alpha f(tx,ty)+\Phi(f)(tx,ty))t^{-\alpha-1}=0
\end{aligned}$$

   On en déduit que φ est constante, et égale à $\varphi(1)$, d'où $f(tx,ty)=t^\alpha f(x,y)$.