CHAPITRE 25 - SÉRIES ENTIÈRES

Exercice 25.2

Puisque $(a_n 1^n)$ converge vers 0, le rayon de converge est au moins 1. Puisque $\sum a_n 1^n$ diverge, le rayon de convergence est au plus 1. Finalement $R = 1$.

Exercice 25.3

La série de fonctions $t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{int}$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$. On peut donc inverser les sommations et

$$\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int}\,dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(a_k r^k \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t}\,dt \right).$$

L'intégale $\int_0^{2\pi} e^{ipt}\,dt$ est nulle lorsque p est non nul, et vaut 2π lorsque p est nul. Dans la série précédente, toutes les intégrales son nulles sauf lorsque $n = k$, et on obtient donc

$$A_n(r) = \frac{a_n r^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt = a_n r^n.$$

Si, pour tout z complexe, on a $|f(z)| \leq M$, alors

$$|A_n(r)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int}\,dt \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M\,dt = M,$$

et l'on en déduit que pour tout entier $n > 0$ et tout réel $r > 0$, on a l'inégalité $|a_n r^n| \leqslant M$, ou encore $|a_n| \leqslant M/r^n$. En faisant tendre r vers l'infini, on en déduit que $|a_n| \leqslant 0$, et donc $a_n = 0$. On a alors $f(z) = a_0$ et la fonction f est constante. La fonction sinus donne un exemple de fonction qui est développable en série entière de rayon infini, et bornée sur $\mathbb{R}$ mais non constante.

Exercice 25.5

1. Exprimons $\sin x$ sous la forme $(e^{ix} + e^{-ix})/(2i)$. On a alors pour tout x réel

$$f(x) = \frac{1}{2i}(e^{(i+1)x} - e^{(-i+1)x}) = \frac{1}{2i} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1+i)^n x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1-i)^n x^n}{n!} \right).$$

   On obtient alors

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{2i} \frac{x^n}{n!},$$

   et, puisque $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, on a $\frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{2i} = \sqrt{2}^n \sin(n\pi/4)$, et finalement

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{2}^n \sin(n\pi/4) \frac{x^n}{n!}.$$

   La série entière est donc de rayon infini (puisque la relation précédente est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$).

2. Appliquons la formule du produit de Cauchy à $e^x \sin x$. Si l'on note a_n les coefficients de la série de $\sin x$, le coefficient b_n de x^n dans le produit est alors $b_n = \sum_{p=0}^{n} a_p \frac{1}{(n-p)!}$. Or a_p est nul si p est pair et $a_{2k+1} = (-1)^k/(2k+1)!$. On obtient donc

$$b_n = \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!(n-2k-1)!}.$$

   Par unicité du développement en série entière, on obtient l'égalité avec la première question.

Exercice 25.6

1. On a $\lambda^n a_n z^n = a_n(\lambda z)^n$. Si $|\lambda z| < R$ (soit $|z| < R/|\lambda|$) alors $\sum \lambda^n a_n z^n$ converge, et si $|\lambda z| > R$ (soit $|z| > R/|\lambda|$) alors $\sum \lambda^n a_n z^n$ diverge. On en déduit que la nouvelle série entière a un rayon de convergence $R/|\lambda|$[.

2. → Soit R' le rayon de convergence de $\sum a_n^2 z^n$. On remarque que $|a_n^2 z^n| = \left(|a_n|(\sqrt{|z|})^n\right)^2$.
   → Si $\sqrt{|z|} < R$ (c'est-à-dire $|z| < R^2$), alors $(a_n \sqrt{|z|}^n)$ est bornée, donc $(|a_n^2 z^n|)$ est bornée. On en déduit que $R' \geqslant R^2$ (tout z de la boule $B(0, R^2)$ vérifie $(a_n^2 z^n)$ est bornée, elle est donc contenue dans $B(0, R')$ et $R^2 \leqslant R'$).
   → Réciproquement, si $|z| < R'$, alors $(a_n^2 z^n)$ est bornée, donc la suite $(a_n \sqrt{|z|}^n)$ est bornée. On a donc $\sqrt{|z|} \leqslant R$, et cela, pour tout z tel que $|z| < R'$. Pour tout z tel que $|z| < R'$, on a $|z| \leqslant R^2$, on en déduit que $R' \geqslant R^2$ (pour tout $r < R'$, on a $B(0, r) \subset B(0, R^2)$), si bien que $R' \leqslant R^2$).

Exercice 25.7

- → Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $0 < \alpha < R$, et $z \in \mathbb{C}$. La suite $(|a_n|\alpha^n)$ est bornée. Soit M un majorant de cette suite. On a alors $\frac{|a_n|}{n!}|z|^n \leqslant M\frac{1}{n!}\left(\frac{|z|}{\alpha}\right)^n$, et comme la série de terme général $\frac{1}{n!}\left(\frac{|z|}{\alpha}\right)^n$ est une série convergente, on en déduit que la série de terme général $a_n z^n/n!$ converge absolument. La série entière $\sum \frac{a_n}{n!}z^n$ a donc un rayon de convergence infini.
- → Lorsque $R = 0$, on ne peut pas dire grand chose. Il suffit de prendre $a_n = (n!)^\alpha$ où $\alpha > 0$. Si $\alpha = 1$, le nouveau rayon est 1, si $\alpha > 1$, il est nul et si $\alpha \in]0,1[$, il est infini.

Exercice 25.8

$1 \Rightarrow 2$: il existe un entier n_0 et $M \in \mathbb{R}^+$ tels que, pour tout $n \geqslant n_0$, $\sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \frac{M}{n}$, ce qui donne $|a_n| \leqslant \frac{M^n}{n^n}$. Le rayon de convergence de $\sum n! a_n z^n$ est donc supérieur ou égal à celui de $\sum n!\frac{M^n}{n^n}z^n$. Soit $u_n = \frac{n!}{n^n}M^n z^n$ (on suppose $M > 0$ sinon tous les coefficients a_n sont nuls à partir d'un certain rang). Les termes u_n sont non nuls, et

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^n}M|z| = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n M|z|.$$

Ce quotient tend vers $\frac{M|z|}{e}$ lorsque n tend vers $+\infty$, et la série entière a un rayon de convergence égale à e/M. On en déduit que la série entière de départ a un rayon de convergence strictement positif. Plus simplement, il suffit de constater que $|u_n| \leqslant (M|z|)^n$ et la série converge lorsque $|z| > 1/M$ (on a $n!/n^n \leqslant 1$).

$2 \Rightarrow 1$: Soit R le rayon de convergence de la série entière et soit $M \in [0,R[$. La suite $(n!a_n M^n)$ est bornée. Il existe $K \geqslant 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|n!a_n M^n| \leqslant K$. Cela donne $|a_n| \leqslant \frac{K}{n!M^n}$ et $n\sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\frac{K^{1/n}}{M}$. La suite $(K^{1/n})$ converge vers 1. Par la forme faible de la formule de Striling, on a $\sqrt[n]{n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{e}$. Finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\frac{K^{1/n}}{M} = \frac{e}{M}$. La suite étant convergente, elle est bornée. On en déduit par conséquent que $(n\sqrt{|a_n|})$ est bornée, ce qui signifie bien que $\sqrt[n]{|a_n|} = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 25.9

Pour $x < 2$, on a $f(x) = \sqrt{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{1/2}$. On se ramène à une série connue et on obtient une série de rayon de convergence 2.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{2}\left(1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\frac{1}{2^n}(-1)^n x^n\right) \\ &= \sqrt{2}\left(1-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^{2n}n!}x^n\right). \end{aligned}$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par le produit
$2\cdot 4\cdots(2n-2)(2n-1)(2n) = 2^n n!(2n-1)$, on peut encore écrire

$$f(x) = \sqrt{2}\left(1-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!}{(2n-1)2^{3n}(n!)^2}x^n\right).$$

Exercice 25.10

1. Le dénominateur s'annule lorsque $e^t = -x$. Si $x > -1$, le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^+$. La fonction $t \mapsto \frac{t}{x+e^t}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et négligeable devant $1/t^2$ en $+\infty$. Pour $x = -1$, on a la continuité sur $]0,+\infty[$ et $\frac{t}{e^t-1} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t}{t} = 1$. L'intégrale est faussement impropre en 0. Le comportement en $+\infty$ est le même. Si $x < -1$, le dénominateur s'annule dans $]0,+\infty[$ et l'intégrale n'existe pas. Finalement l'ensemble de définition est $[-1,+\infty[$.
2. On a pour $t \geqslant 0$ et $|x| < 1$
$$\frac{t}{x+e^t} = \frac{te^{-t}}{1+xe^{-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n te^{-(n+1)t}$$
On note $f_n(t) = (-1)^n x^n te^{-(n+1)t}$. On a $\int_0^{+\infty}|f_n(t)|\mathrm{d}t = |x^n|\int_0^{+\infty}te^{-(n+1)t}\mathrm{d}t = \frac{|x^n|}{(n+1)^2}$. La série $\sum\int_0^{+\infty}|f_n(t)|\mathrm{d}t$ converge. On a évidement converge simple de la série de fonctions sur $[0,+\infty[$ et la fonction somme est continue sur cet intervalle (elle vaut $\frac{t}{x+e^t}$). On a par conséquent
$$\text{pour tout } x \in]-1,1[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}x^n$$

On a notamment, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)}(0) = (-1)^p \dfrac{p!}{(p+1)^2}$.

Exercice 25.12

On vérifie que le rayon de convergence est 1 (règle de d'Alembert) et que la série converge absolument en ± 1. La fonction f est donc définie sur $[-1,1]$. Elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$. On peut décomposer $\dfrac{1}{n(3n+1)}$ en éléments simples ou d'abord calculer $f'(x)$ (pour profiter de la simplification). Pour $x \in]-1,1[$, $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^3)^n}{n} = -\ln(1-x^3)$. On a alors pour $|x|<1$,

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= -\int_0^x \ln(1-t^3)\,dt = -\Big[t\ln(1-t^3)\Big]_0^x - 3\int_0^x \frac{t^3}{1-t^3}\,dt \\ &= -x\ln(1-x^3) - 3\int_0^x \frac{t^3-1+1}{1-t^3}\,dt = -x\ln(1-x^3) + 3x - 3\int_0^x \frac{1}{1-t^3}\,dt \end{aligned}$$

On effectue la décomposition en éléments simples :

$$\frac{-3}{1-t^3} = \frac{3}{(t-1)(1+t+t^2)} = \frac{1}{t-1} - \frac{t+2}{t^2+t+1} = \frac{1}{t-1} - \frac{t+1/2}{t^2+t+1} - \frac{3/2}{(t+1/2)^2+3/4}$$

et on termine le calcul des primitives avec ça :

$$f(x) = 3x - x\ln(1-x^3) + \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Exercice 25.13

- → Par encadrement, on a $\frac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 t^n\,dt \leqslant a_n \leqslant \int_0^1 t^n\,dt$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{2(n+1)} \leqslant a_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. Puisque $\sum \dfrac{x^n}{n+1}$ a un rayon de convergence égal à 1, on en déduit que le rayon de convergence cherché est 1 également.
- → Lorsque $t \in [0,1]$ et $|x|<1$, on a $\dfrac{t^n|x|^n}{1+t^2} \leqslant |x|^n$. La série de fonctions $t \mapsto \dfrac{t^n|x|^n}{1+t^2}$ converge donc normalement sur $[0,1]$, et l'on peut intervertir les signes $\int$ et $\sum$. On obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} \sum_0^{+\infty} (tx)^n\,dt = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)(1-tx)}.$$

On décompose en éléments simples

$$\frac{1}{(1+t^2)(1-tx)} = \frac{1}{1+x^2}\left(\frac{1+tx}{1+t^2} + \frac{x^2}{1-tx}\right),$$

ce qui permet de calculer l'intégrale. Pour $|x|<1$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \frac{1}{1+x^2}\left[\arctan t + \frac{x}{2}\ln(t^2+1) - x\ln(1-tx)\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{1+x^2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}x - x\ln(1-x)\right). \end{aligned}$$

Exercice 25.14

1.
   - → Les deux séries ont même rayon de convergence que leur série dérivée $\sum \cos((n+1)\alpha)x^n$ et $\sum \sin((n+1)\alpha)x^n$. Puisque $|\cos((n+1)\alpha)| \leqslant 1$ et $|\sin((n+1)\alpha)| \leq 1$, on obtient que dans les deux cas la série est de rayon supérieur ou égal à 1.
   - → De l'égalité $\cos(2(n+1)\alpha) = 2\cos^2((n+1)\alpha) - 1$, on déduit que la suite $(\cos((n+1)\alpha))$ ne peut converger vers 0 (sinon on obtiendrait $0 = -1$ par passage à la limite). La série de terme général $x^n\cos((n+1)\alpha)$ est donc de rayon 1, ainsi que la série de terme général $\dfrac{x^n\cos(n\alpha)}{n}$.
   - → De l'égalité $\sin((n+1)\alpha) = \sin(n\alpha)\cos\alpha + \cos(n\alpha)\sin\alpha$, on déduit que si la suite $(\sin(n\alpha))$ converge vers 0, alors la suite $(\cos(n\alpha)\sin\alpha)$ converge vers 0, et puisque la suite $(\cos(n\alpha))$ ne converge pas vers 0, on a $\sin\alpha = 0$, soit $\alpha = k\pi$, avec k entier. Réciproquement, si $\alpha = k\pi$ avec k entier, alors la suite $(\sin(n+1)\alpha)$ est la suite nulle.
   - → *Conclusion :* la série entière $\sum \dfrac{x^n}{n}\sin(n\alpha)$ est de rayon 1 lorsque α n'est pas un multiple entier de π et est de rayon infini sinon.

2. Lorsque $|x|<1$, on peut calculer la somme des deux séries simultanément en posant $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \frac{e^{in\alpha}}{n}$. On obtient en dérivant

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{i(n+1)\alpha}x^n = \frac{e^{i\alpha}}{1-e^{i\alpha}x} = \frac{e^{i\alpha}(1-e^{-i\alpha}x)}{1-2x\cos\alpha + x^2}.$$

Ainsi $f'(x) = \dfrac{\cos\alpha - x}{1-2x\cos\alpha + x^2} + i\,\frac{\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$. Alors A est la primitive nulle en 0 de $\Re f$. Donc $A(x) = -\frac{1}{2}\ln(1-2x\cos\alpha + x^2)$.

3. Si l'on pose $B(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n}\sin(n\alpha)$, alors B est la primitive nulle en 0 de $\Im f$. En dérivant la fonction $h : x \mapsto \arctan\left(\frac{x\sin\alpha}{1-x\cos\alpha}\right)$, qui est nulle en 0, on obtient bien $h'(x) = \operatorname{Im} f$, d'où le résultat.

Exercice 25.15

1. On note $u_n = a_n x^n$. Ce terme est non nul pour $x \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = -\frac{2n-1}{2n+1}\,\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}\,\frac{(n!)^2}{(2n)!}x = -\frac{2n-1}{2n+1}\,\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}x = -\frac{2(2n-1)}{n+1}x$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 4|x|$. Le rayon de convergence de la série entière est $\frac{1}{4}$.

2. On reprend le calcul précédent qui donne $(n+1)a_{n+1} = -(4n-2)a_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in]-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}[$, on a

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(4n-2)a_n x^n$$

Avec $a_1 = -2$, cela donne, $f'(x) = -2 + 4xf'(x) - 2f(x)$ soit encore $(1-4x)f'(x) + 2f(x) = -2$. On résout cette équation différentielle sur $]-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}[$. Une solution particulière est la fonction constante égale à 1. Les solutions de l'équation homogène sont les multiples de $x \mapsto \exp(\frac{1}{2}\ln|4x-|)) = \sqrt{1-4x}$. On a donc $f(x) = 1 + A\sqrt{1-4x}$. Puisque $f(0) = 0$, on a finalement

$$\forall x \in]-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}[, f(x) = 1 - \sqrt{1-4x}.$$

Exercice 25.16

1. La fonction f est la somme d'une série entière. On calcule le rayon de convergence de cette série entière. Soit $u_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2^n n!)^2}$. Si $x \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) \neq 0$ et $\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \dfrac{x^2}{4(n+1)^2}$, de limite nulle lorsque n tend vers $+\infty$. Donc le rayon est infinie et f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2. On peut écrire $f(x), f'(x)$ et $f''(x)$ et essayer de trouver une combinaison entre ces fonctions. Plus généralement, on peut partir du quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et reconstituer les fonctions. On pose $u_n(x) = a_n x^{2n}$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}(x) = -\dfrac{x^2}{(2n+2)^2}u_n(x)$ c'est-à-dire $(2n+2)^2 a_{n+1}x^{2n+2} = -x^2 a_n x^{2n}$ et pour $x \neq 0$, $(2n+2)^2 a_{n+1}x^{2n} = -a_n x^{2n}$. On somme ces relations (toujours pour $x \neq 0$) et on reconstitue les fonctions. On a tout d'abord, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(2n+2)^2 a_{n+1}x^{2n} = -f(x)$. Pour faire apparaître $f''(x)$, on décompose $(2n+2)^2 = (2n+2)(2n+1) + (2n+2)$ cela donne

$$-f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+2)(2n+1)a_{n+1}x^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+2)a_{n+1}x^{2n}$$

en multipliant par x (pour faire apparaître $f'(x)$ dans la dernière somme), on obtient finalement $-xf(x) = xf''(x) + f'(x)$ donc f est solution de $xy'' + y' + xy = 0$.

3. Pour $x > 1$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2}t^{2n}e^{-xt}\right)dt$. On définit la fonction v_n sur $\mathbb{R}^+$ par $v_n(t) = \dfrac{(-1)^n}{(2^n n!)^2}t^{2n}e^{-xt}$. La fonction v_n est continue sur $\mathbb{R}_+$, intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (puisque $v_n(t) = o(1/t^2)$) et, à l'aide du changement de variable $u = xt$, puis d'intégrations par parties successives, on montre que

$$\int_0^{+\infty} v_n(t)\,dt = \frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2}\,\frac{1}{x^{2n+1}}\int_0^{+\infty}u^{2n}e^{-u}\,du = (-1)^n\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2 x^{2n+1}}.$$

Puisque v_n est de signe fixe, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty}|v_n(t)|\,dt = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2 x^{2n+1}}$. On note α_n ce dernier réel. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\left|\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| = \dfrac{(2n+2)(2n+1)}{(2n+2)^2x^2} = \dfrac{2n+1}{(2n+2)x^2}$. Cette suite tend vers $1/x^2$ lorsque n tend vers $+\infty$. Puisque $\dfrac{1}{x^2} \in]0,1[$, la série $\sum \alpha_n$ converge. De plus $\sum v_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$ est la fonction continue $t \mapsto f(x)e^{-xt}$. Le théorème d'intégration terme à terme donne $F(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2 x^{2n+1}}$. Il reste à prouver que cette somme vaut $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Pour $x > 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{x}\,\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\beta_n\frac{1}{x^{2n}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\beta_n\frac{1}{x^{2n+1}}$$

où $\beta_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\beta_n = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!} = (-1)^n \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2^n n!} = (1)^n \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}.$$

La formule générale est valable pour $n = 0$. Si $x > 1$, on trouve la formule demandée

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2 x^{2n+1}} = F(x).$$

Exercice 25.17

On commence par remarquer qu'il existe M tel que $[a_n| \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La série entière $\sum \frac{M}{n!} x^n$ a un rayon de convegence infini donc f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geqslant n_0$, $|a_n| \leqslant \varepsilon$. On découpe la somme en passant par n_0 :

$$f(x) = \left(\sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{a_n}{n!} x^n\right) + \sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$$

   ce qui donne la majoration, pour $x \geqslant 0$,

$$|f(x)| \leqslant \left|\sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{a_n}{n!} x^n\right| + \varepsilon \sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n \leqslant \left|\sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{a_n}{n!} x^n\right| + \varepsilon e^x.$$

   Cela donne $|f(x)|e^{-x} \leqslant \left|\sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{a_n}{n!} x^n\right| e^{-x} + \varepsilon$. Par croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty} \left|\sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{a_n}{n!} x^n\right| e^{-x} = 0$, donc il existe $A > 0$ tel que, pour $x \geqslant A$, $\left|\sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{a_n}{n!} x^n\right| e^{-x} \leqslant \varepsilon$. Pour tout $x \geqslant A$, on a $|f(x)|e^{-x} \leqslant 2\varepsilon$. Cela donne $\lim_{x\to+\infty} f(x)e^{-x} = 0$ c'est-à-dire $f(x) = \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}(e^x)$.

2. On écrit $a_n = \ell + b_n$ avec b_n de limite nulle. On a alors

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ell + b_n}{n!} x^n = \ell e^x + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} x^n.$$

   D'après la question précédente, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} x^n = \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}(e^x)$. Ainsi $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ell e^x$.

Exercice 25.21

1. $1 - \ln 2$
2. $\arctan \frac{1}{4}$
3. $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^3+1} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\ln 2$

Exercice 25.22

1. On note $I =]-\pi, 0[\cap]0, \pi[$ et $J =]-\pi, \pi[$. Pour tout $x \in I$, on a

$$f(x) = \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \frac{x - \sin x}{x^2} \frac{x}{\sin x}.$$

   Puisque $x - \sin x \underset{x\to0}{\sim} \frac{x^3}{6}$, on en déduit $f(x) \underset{x\to0}{\sim} \frac{x}{6}$ et f tend vers 0 en 0.

2. Soit $h(x) = \frac{x - \sin x}{x^2}$ prolongé par 0 en 0. Pour tout $x \in I$, on a

$$h(x) = -\frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+3)!}.$$

   L'égalité est vraie également en 0. Ainsi h est la somme d'une série entière sur J, donc h est indéfiniment dérivable sur J. On montre de même que $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$, prolongée par 1 en 0, est indéfiniment dérivable sur J. Ne s'annulant pas sur J sont inverse l'est aussi. Finalement f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur J.

Exercice 25.24

1. On a $u_1 = u_2 = 1$ (une seule façon de calculer le produit). Pour un produit $a_1 \times a_2 \times a_3$, on a 2 façons de faire le calcul.
2. Pour effectuer un produit de n termes avec n au moins égal à 2, on termine par un dernier produit entre un produit avec les k premiers termes (avec $k \geqslant 1$) et les $n-k$ derniers (avec k au plus égal à $n-1$). Pour ce type de produit, on a u_k façons de calculer le produit des k premiers termes et u_{n-k} pour les $n-k$ derniers. Le nombre total de façons est donc $u_k u_{n-k}$ et cela pour k allant de 1 à $n-1$. On obtient la relation voulue : $u_n = \sum_{k=1}^{n-1} u_k u_{n-k}$.
3. On note donc $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n$. On a, pour $|x| < R$,

$$S(x) = x + \sum_{n=2}^{+\infty} u_n x^n = x + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} u_k u_{n-k} \right) x^n$$

On retrouve exactement le produit de Cauchy de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n$ avec elle-même (on peut retrouver la formule usuelle en posant par exemple $u_0 = 0$. Le premier terme de $S^2(x)$ est bien un terme en x^2. Finalement, pour $|x| < R$, on a

$$S(x) = x + S^2(x).$$

On résout cette équation du second degré pour trouver $S(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2}$. Puisque $S(0) = 0$, on a $S(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2}$. On n'a plus qu'à redévelopper en série entière pour trouver les coefficients u_k par unicité : pour $|x| < \frac{1}{4}$,

$$\sqrt{1-4x} = (1-4x)^{1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.(-1)\cdots(-2n+3)}{2^n} \frac{(-4x)^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!2^n 2^{n-1}} \frac{(-4x)^n}{n!}$$

donc

$$S(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} 2.\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} x^n$$

ce qui donne, pour $n \geqslant 1$, $u_n = \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}$. On vérifie pour les premières valeurs de n : pour $n = 1$, on trouve 1, pour $n = 2$, $\frac{2!}{2!} = 1$ et $u_3 = \frac{4!}{3!2!} = 2$.

Remarque : on peut écrire aussi $u_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$.

Exercice 25.25

1. On vérifie par récurrence que la suite (a_n) est bien définie et à valeurs non nulles. De plus $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ tend vers 0 donc le rayon de convergence de la série entière est $+\infty$ et sa somme totale f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ on a $a_{n+1}(\ell x)^{n+1} - a_{n+1}x^{n+1} = \ell a_n x^n$. En sommant ces égalités on obtient la relation $f(\ell x) - f(x) = \ell x f(x)$ i.e. $(*) f(\ell x) = (1+\ell x) f(x)$. Soit Z l'ensemble des x tels que $f(x) = 0$. La relation $(*)$ montre
   i) $-1 \in Z$
   ii) si x est dans Z, ℓx y est aussi ;
   iii) si $x \neq -1$ est dans Z alors $\frac{x}{\ell}$ est dans Z.
   On en déduit $Z = \left\{-\ell^n / n \in \mathbb{N}\right\}$. En effet, de i) et ii) on déduit $\left\{-\ell^n / n \in \mathbb{N}\right\} \subset Z$.
   Inversement supposons par l'absurde l'existence de $x \in \mathbb{Z} \setminus \left\{-\ell^n / n \in \mathbb{N}\right\}$. Alors, d'après iii), Z contiendrait tous les réels $\frac{x}{\ell^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   C'est absurde car par continuité de f on aurait $1 = a_0 = f(0) = \lim_n f\left(\frac{x}{\ell^n}\right) = 0$.