

CHAPITRE 24 - RÉDUCTION - PARTIE 2

Exercice 24.1

Le polynôme $P = (X+1)^3(X+2)$ est annulateur de f . Le polynôme minimal est un diviseur de ce polynôme P . Si f est diagonalisable alors son polynôme minimal serait parmi les polynômes $X+1$, $X+2$ et $(X+1)(X+2)$. Or le polynôme $Q = (X+1)^2(X+2)$ n'est pas annulateur donc aucun des trois polynômes précédents ne peut l'être (Q en est un multiple à chaque fois). En conclusion f n'est pas diagonalisable.

Exercice 24.2

1. Déterminons le polynôme caractéristique χ_A de A :

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \begin{vmatrix} X & -2 & 1 \\ 1 & X-3 & 1 \\ 1 & -2 & X \end{vmatrix} \underset{C_1 - \sum_{i=1}^3 C_i}{=} \begin{vmatrix} X-1 & -2 & 1 \\ X-1 & X-3 & 1 \\ X-1 & -2 & X \end{vmatrix} \\ &= (X-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & X-3 & 1 \\ 1 & -2 & X \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 - L_2 - L_1 \\ L_3 - L_3 - L_1}}{=} (X-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & X-1 & 0 \\ 0 & 0 & X-1 \end{vmatrix} \\ &= (X-1)^3 \end{aligned}$$

Ainsi A admet 1 comme unique valeur propre.

2. Puisque 0 n'est pas valeur propre de A , A est inversible. Si A était diagonalisable elle serait semblable à la matrice identité et donc égale à la matrice identité. Puisque ce n'est pas le cas, A n'est pas diagonalisable.
3. Notons P_m le polynôme minimal de A . P_m divise χ_A et P_m est un polynôme annulateur de A . On a $A - I_3 \neq 0$ et $(A - I_3)^2 = 0$. Ainsi $P_m = (X-1)^2$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On effectue la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$: $X^n = (X-1)^2 Q + (aX + b)$. Puisque 1 est racine double de $(X-1)^2$ on obtient : $1 = a + b$ et, après dérivation, $n = a$. Finalement $R = nX + 1 - n$. Puisque $P_m = (X-1)^2$ est un polynôme annulateur de A on a d'après (1) et (2) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = nA + (1-n)I_3$$

Exercice 24.3

1. On a $u^3 + u^2 + u = 0$. Soit $y \in \text{Im} u \cap \ker u$, alors $\exists x \in E$ tel que $y = u(x)$ et $u(y) = 0$. Donc, $0 = u^3(x) + u^2(x) + u(x) = \underbrace{u^2(y)}_{=0} + \underbrace{u(y)}_{=0} + y = 0$ et $y = 0$. On a $\ker u \cap \text{Im} u = \{0\}$. De plus, d'après le théorème du rang, $\dim E = \dim \ker u + \dim \text{Im} u$. On en déduit, $E = \ker u \oplus \text{Im} u$.
2. (a) Si P et Q sont deux polynômes premiers entre eux, alors $\ker(PQ)(u) = \ker P(u) \oplus \ker Q(u)$.
- (b) On pose $P = X^3 + X^2 + X$. P est un polynôme annulateur de u donc $\ker P(u) = E$. $P = X(X^2 + X + 1)$. De plus, X et $X^2 + X + 1$ sont premiers entre eux. D'après le lemme des noyaux, $E = \ker u \oplus \ker(u^2 + u + \text{Id})$. On en déduit que $\dim \ker(u^2 + u + \text{Id}) = \dim E - \dim \ker u = \dim \text{Im} u$. On montre alors que $\text{Im} u \subset \ker(u^2 + u + \text{Id})$: soit $y \in \text{Im} u$, alors $\exists x \in E$ tel que $y = u(x)$. $(u^2 + u + \text{Id})(y) = (u^3 + u^2 + u)(x) = 0$, donc $y \in \ker(u^2 + u + \text{Id})$. On a donc prouvé que $\text{Im} u \subset \ker(u^2 + u + \text{Id})$, donc $\text{Im} u = \ker(u^2 + u + \text{Id})$.
3. $P = X^3 + X^2 + X = X(X^2 + X + 1)$ est un polynôme annulateur de u . Si on note $\text{sp}(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u alors $\text{sp}(u) \subset \{\text{racines réelles de } P\}$, donc $\text{sp}(u) \subset \{0\}$. Or u est non bijectif donc, comme u est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, u est non injectif, donc $\ker u \neq \{0\}$, donc 0 est valeur propre de u . On en déduit que $\text{sp}(u) = \{0\}$.

Exercice 24.4

1. Pour tout $M \in M_n(\mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} \phi^2(M) &= \text{tr}(\phi(M))I_n - \phi(M) = (n-1)\text{tr}(M)I_n - (\text{tr}(M)I_n - M) \\ &= (n-2)(\text{tr}(M)I_n - M) + (n-1)M = (n-2)\phi(M) + (n-1)M. \end{aligned}$$

Le polynôme $P = X^2 - (n-2)X - (n-1) = (X+1)(X-n+1)$ est scindé à racines simples et c'est un polynôme annulateur de ϕ , donc ϕ est diagonalisable.

2. Pour $n \geq 2$, ϕ n'est visiblement pas une homothétie donc ϕ admet pour valeur propre -1 et $n-1$. On a $M \in E_{-1}(\phi)$ si, et seulement si, $\text{tr}(M)I_n = 0$ donc $E_{-1}(M) = \{M \in M_n(\mathbb{C}), \text{tr}(M) = 0\}$, c'est-à-dire l'hyperplan des matrices de trace nulle (de dimension $n^2 - 1$). Le second sous-espace propre est donc une droite, et on vérifie que $\phi(I_n) = (n-1)I_n$ donc $E_{n-1}(\phi) = \text{Vect}(I_n)$.
3. La trace de ϕ est égale à la somme des valeurs propres comptées avec leur multiplicité : $\text{tr} \phi = (n^2 - 1) \times (-1) + (n-1) = -n(n-1)$. De même, le déterminant de ϕ est égal au produit des valeurs propres comptées avec leur multiplicité : $\det \phi = (-1)^{n^2-1} \times (n-1) = (-1)^{n-1} (n-1)$ (n^2 a même parité que n).
4. Le polynôme caractéristique est $\chi_\phi(X) = (X+1)^{n^2-1} (X-n+1)$.

5. ϕ est inversible puisque $\det \phi \neq 0$. On détermine ϕ^{-1} grâce au polynôme annulateur, en effet $\phi^2 - (n-2)\phi - (n-1)\text{Id} = 0$ donc

$$\phi \circ (\phi - (n-2)\text{Id}) = (n-1)\text{Id},$$

ce qui donne $\phi^{-1} = \frac{1}{n-1}(\phi - (n-2)\text{Id})$.

Exercice 24.5

On a plusieurs moyens pour le faire.

- le plus rapide est de constater que si M est symétrique alors $f(M) = 3M$ et si M est antisymétrique $f(M) = -M$. Puisque $A_n(\mathbb{R})$ et $S_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires, on a décomposé $M_n(\mathbb{R})$ en somme de deux sous-espaces vectoriels de vecteurs propres donc f est diagonalisable, ses éléments propres sont $(3, S_n(\mathbb{R}))$ (avec une dimension $\frac{n(n+1)}{2}$) et $(-1, A_n(\mathbb{R}))$ (avec une dimension $\frac{n(n-1)}{2}$).
- si on ne le remarque pas, on peut chercher un polynôme annulateur de f : pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$,

$$f^0(M) = (\text{Id})(M) = M, f(M) = M + 2^t M \text{ et } f^2(M) = f(M + 2^t M) = M + 2^t M + 2^t(M + 2M) = 5M + 4^t M$$

On a donc $f^2(M) - 2f(M) = 3M = 3f^0(M)$, c'est-à-dire $(f^2 - 2f - 3\text{Id})(M) = 0$ pour toute matrice M . Ainsi le polynôme $X^2 - 2X - 3 = (X-3)(X+1)$ est annulateur, scindé à racines simples. L'endomorphisme est diagonalisable et $\text{Sp} f \subset \{-1, 3\}$. On résout $f(M) = 3M$: c'est équivalent à $M = {}^t M$. De même $f(M) = -M$ si et seulement si M est antisymétrique.

Il existe une base de $M_n(\mathbb{R})$ dans laquelle la matrice de f est diagonale avec $\frac{n(n+1)}{2}$ termes diagonaux de valeur 3 et les $\frac{n(n-1)}{2}$ autres de valeur -1. Cela donne $\det f = 3^{\frac{n(n+1)}{2}} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ et $\text{tr} f = 3 \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n^2 + 2n$.

Exercice 24.6

la matrice A n'admet pas de polynôme annulateur non nul de degré inférieur ou égal à $n-1$ (indépendance de la famille). Le polynôme $X^n - 1$ est par conséquent le polynôme minimal de A . La matrice A est donc diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$ (polynôme annulateur scindé à racines simples) et ses valeurs propres sont exactement les racines n -ièmes de l'unité. La matrice admet donc exactement n valeurs propres distinctes, qui sont forcément de multiplicité 1. La matrice A est donc semblable à la matrice de diagonale $(1, \omega, \dots, \omega^{n-1})$ où $\omega = e^{2i\pi/n}$. La trace de A est la somme de ces valeurs propres, c'est-à-dire 1 (la trace est invariante par changement de base). On peut aussi dire que $\chi_A = X^n - 1$ et $\text{tr} A$ est l'opposé du coefficient de degré $n-1$

Exercice 24.7

Soit $P = X^3 - X - 1$. On a $P' = 3X^2 - 1$. Une rapide étude montre que P est croissant sur $]\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}]$ et $[\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty[$, décroissant entre les deux. Il admet un maximum local $P(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{2}{3\sqrt{3}} - 1 < 0$, et finalement une unique racine réelle $\alpha > 0$ (entre 1 et 2). Notons β et $\bar{\beta}$ les deux racines complexes conjuguées. Le polynôme P est donc scindé à racines simples et A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$. Elle est semblable à une matrice diagonale de diagonale α (k fois), β (m fois) et $\bar{\beta}$ (m' fois). On montre que $m = m'$: soit parce qu'on sait que l'application $X \mapsto \bar{X}$ est une bijection entre les deux sous-espaces propres associés à ces deux valeurs conjuguées, soit parce que la trace est réelle et sa partie imaginaire est $(m - m')\text{Im}(\beta)$. Finalement, on a $\det A = \alpha^k (\beta \bar{\beta})^m = \alpha^k |\beta|^{2m} > 0$.

Exercice 24.8

Le polynôme caractéristique de M s'écrit $\sum_{k=0}^n a_k X^k$ avec $a_n = 1$ et $a_0 = (-1)^n \det M \neq 0$ puisque M est inversible. Ce polynôme est annulateur, et

$$a_0 I_n + \sum_{k=1}^n a_k M^k = 0. \text{ Cela peut s'écrire } M \left(\sum_{k=1}^n a_k M^{k-1} \right) = -a_0 I_n, \text{ ou encore}$$

$$M \left(\sum_{k=1}^n -\frac{a_k}{a_0} M^{k-1} \right) = I_n.$$

Cela prouve que l'inverse de M est $\sum_{k=1}^n -\frac{a_k}{a_0} M^{k-1}$, polynôme en M .

Exercice 24.9

Le polynôme P s'écrit $P = XQ$ avec $Q(0) \neq 0$. Le théorème de décomposition des noyaux donne $E = \ker f \oplus \ker Q(f)$. On va montrer que $\ker Q(f) = \text{Im} f$. En fait puisque $\dim \ker Q(f) = n - \dim \ker f = \dim \text{Im} f$, une inclusion suffit. Soit $Q = a_0 + a_1 X + \dots + a_q X^q$ avec $a_0 \neq 0$. Si $x \in \ker Q(f)$, alors

$$a_0 x + \sum_{k=1}^q a_k f^k(x) = 0,$$

ce qui donne

$$x = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^q a_k f^k(x) = f\left(-\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^q a_k f^{k-1}(x)\right) \in \text{Im } f.$$

Exercice 24.10

On note $B = A^2 - 2A$. La matrice est diagonalisable : si on note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ses valeurs propres, alors

$$M_{n1}(\mathbb{C}) = \bigoplus_{k=1}^p \ker(B - \lambda_k I_n) = \bigoplus_{k=1}^p \ker(A^2 - 2A - \lambda_k I_n).$$

Soit $P_k = X^2 - 2X - \lambda_k$. On voudrait appliquer le théorème de décomposition des noyaux à $\ker P_k(A)$. Pour cela il suffit que P possède deux racines distinctes. Son discriminant est $4 + 4\lambda$. Si $\lambda \neq -1$, alors on peut noter α_k et β_k les deux racines de P_k . On a alors $\ker(A^2 - 2A - \lambda_k I_n) = \ker(A - \alpha_k I_n) \oplus \ker(A - \beta_k I_n)$.

On s'intéresse au cas $\lambda = -1$. Cela revient à étudier $\ker(A - I_n)^2$. Or 1 n'est pas valeur propre de A donc $A - I_n$ est bijective, donc $(A - I_n)^2$ aussi et le cas $\lambda = -1$ ne peut se produire (on a $\ker(A - I_n)^2 = \{0\}$). Finalement

$$M_{n1}(\mathbb{C}) = \bigoplus_{k=1}^p (\ker(A - \alpha_k I_n) \oplus \ker(A - \beta_k I_n)).$$

L'espace est somme d'espaces propres de A (certains termes de la somme sont éventuellement nuls), donc A est diagonalisable.

Exercice 24.11

Si M est semblable à une matrice diagonale D , alors M^2 est semblable à D^2 . Réciproquement, supposons que M est diagonalisable et notons $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ les valeurs propres distinctes de M^2 (ainsi que $E = \mathbb{C}^n$). On a $E = \bigoplus_{i=1}^p \ker(M^2 - \alpha_i I_n)$. Si α_i est un complexe non nul, il admet une racine carrée complexe β_i et $X^2 - \alpha_i = (X - \beta_i)(X + \beta_i)$. Ainsi, le théorème de décomposition des noyaux donne $\ker(M^2 - \alpha_i I_n) = \ker(M - \beta_i I_n) \oplus \ker(M + \beta_i I_n)$. Si 0 n'est pas valeur propre de M^2 (dans ce cas $\ker M = \ker M^2 = \{0\}$), alors E se décompose en somme d'espaces propres donc M est diagonalisable. Supposons que 0 est valeur propre de M^2 - quitte à réordonner, on suppose que $\alpha_p = 0$. On a alors

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p-1} (\ker(M - \beta_i I_n) \oplus \ker(M + \beta_i I_n)) \oplus \ker M^2.$$

On sait que $\ker M \subset \ker M^2$. De plus M n'a pas d'autres valeurs propres que $\pm\beta_i$ et 0 car si λ est valeur propre de M alors λ^2 est valeur propre de M^2 . Ainsi M est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des espaces propres est n , ce qui donne (certaines des dimensions pouvant être nulles) :

$$\sum_{i=1}^{p-1} (\dim \ker(M - \beta_i I_n) + \dim \ker(M + \beta_i I_n)) + \dim \ker M = n.$$

Puisque

$$\sum_{i=1}^{p-1} (\dim \ker(M - \beta_i I_n) + \dim \ker(M + \beta_i I_n)) + \dim \ker M^2 = n,$$

M est diagonalisable si et seulement si $\dim \ker M = \dim \ker M^2$ soit $\ker M = \ker M^2$ par inclusion.

Exercice 24.12

1. Écrivons $\chi_A = \prod_{k=1}^p (X - a_k)^{\alpha_k}$ avec a_1, a_2, \dots, a_k les racines distinctes de χ_A . On a alors $\chi_A(B) = \prod_{k=1}^p (B - a_k I_n)^{\alpha_k}$ et

$$\det(\chi_A(B)) = \prod_{k=1}^p (\det(B - a_k I_n))^{\alpha_k}.$$

Ainsi $\chi_A(B)$ n'est pas inversible si et seulement si l'un des facteurs du produit est nul, c'est-à-dire si et seulement si l'un des $\det(B - a_k I_n)$ est nul, ce qui signifie que l'une des valeurs propres de A est valeur propre de B . Par contraposée, on a le résultat.

2. Par récurrence très simple, on a $A^k P = P B^k$. Par linéarité, si Q est un polynôme quelconque, on a $Q(A)P = P Q(B)$. Notamment, avec $Q = \chi_A$ et puisque $\chi_A(A) = 0$, il vient $P \chi_A(B) = 0$. Si A et B n'ont pas de valeur propre commune alors $\chi_A(B)$ est inversible et on obtient $P = 0$. Cette contradiction montre que A et B ont une valeur propre commune.
3. Puisque $\chi_{tB}(X) = \det({}^t B - x I_n) = \det(B - x {}^t I_n) = \chi_B(x)$, les matrices B et ${}^t B$ ont même valeur propre. Il existe alors X un vecteur colonne non nul tel que $AX = \lambda X$ et Y un vecteur colonne non nul tel que ${}^t B Y = \lambda Y$ soit ${}^t Y B = \lambda {}^t Y$. Considérons alors la matrice $P = X {}^t Y$ carrée de taille n . On a $AP = AX {}^t Y = \lambda P$ et $PB = X {}^t Y B = \lambda P$. Donc $AP = PB$ et P a au moins un coefficient non nul puisque X et Y sont deux vecteurs colonnes non nuls.

Exercice 24.13

Le polynôme $X(X^2 + 1) = X(X + i)(X - i)$ est annulateur. Le théorème de décomposition des noyaux donne $\mathbb{R}^3 = \ker u \oplus \ker(u^2 + \text{Id})$.

- on doit commencer par montrer que u n'est pas injective. Il y a plusieurs façons pour le prouver. La seule racine réelle de $X^3 + X$ est 0, c'est donc la seule valeur propre possible. Puisque χ_u est de degré 3, il admet une racine réelle, donc 0. Ainsi 0 est valeur propre et u n'est pas injective ($\ker u$ est de dimension au moins 1). On peut également considérer la matrice de u dans la base canonique de \mathbb{R}^3 . Cette matrice admet $X^3 + X$ comme polynôme annulateur. Ses valeurs propres complexes sont parmi 0, i , $-i$. Puisque les espaces propres $E_i(A)$ et $E_{-i}(A)$ sont de même dimension (donc au maximum 1), l'espace $E_0(A)$ ne peut pas être réduit à 0. On peut également supposer que u est inversible. Alors $u \circ (u^2 + \text{Id}) = 0$ donne $u^2 + \text{Id} = 0$. On obtient $u^2 = -\text{Id}$. En prenant le déterminant, on obtient $(\det u^2) = (\det u)^2 = (-1)^3 = -1$, ce qui est difficile pour un carré de \mathbb{R} .
- On cherche une famille libre (e_2, e_3) telle que $u(e_2) = e_3$ et $u(e_3) = -e_2$. On obtient notamment $u^2(e_2) = -e_2$. Puisque $u \neq 0$, on a $\dim \ker u \leq 2$, si bien que $\dim \ker(u^2 + \text{Id}) \geq 1$. Il existe donc au moins un vecteur non nul dans $\ker(u^2 + \text{Id})$. On le note e_2 et on pose $e_3 = u(e_2)$. On montre facilement que $(u^2 + \text{Id})(e_3) = 0$. La famille (e_2, e_3) est libre. En effet, si $e_3 = u(e_2) = \alpha e_2$, on aurait $u^2(e_2) = \alpha^2 e_2 = -e_2$ donc $\alpha^2 = -1$ ce qui est impossible (α est réel). La famille (e_2, e_3) est donc une famille libre de $\ker(u^2 + \text{Id})$. On prend e_1 un vecteur non nul de $\ker u$. Par somme directe, la famille (e_1, e_2, e_3) est libre, et est donc une base de \mathbb{R}^3 . Dans cette base, la matrice de u est celle demandée.

Exercice 24.14

1. Puisque A est diagonalisable, elle admet un polynôme annulateur scindé à racines simples. Si ce polynôme ne vérifie par $P(0) = 0$, alors 0 n'est pas racine et le polynôme $Q = XP$ est encore scindé à racines simples, et bien entendu annulateur. Ce polynôme est nul en 0. On note B la matrice de taille $2n$ donnée. On vérifie rapidement que $B^2 = \begin{pmatrix} 2A^2 & 2A^2 \\ 2A^2 & 2A^2 \end{pmatrix}$, et par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $B^k = \begin{pmatrix} 2^{k-1}A^k & 2^{k-1}A^k \\ 2^{k-1}A^k & 2^{k-1}A^k \end{pmatrix}$. Notons $B' = B/2$. On a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $B'^k = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A^k & A^k \\ A^k & A^k \end{pmatrix}$. Soit $P = \sum_{k=1}^d a_k X^k$ un polynôme annulateur scindé à racines simples de A , nul en 0. On a

$$P(B') = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d a_k B'^k = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} P(A) & P(A) \\ P(A) & P(A) \end{pmatrix} = 0_{2n}.$$

Ainsi B' est diagonalisable et $B = 2B'$ aussi (on choisit un polynôme annulateur nul en 0 car B^0 n'a pas une bonne forme).

2. On calcule de même B^k . On vérifie par récurrence que $B^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$. Supposons que $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ est un polynôme annulateur de B . On a

$$P(B) = 0_{2n} = \begin{pmatrix} P(A) & C \\ 0 & P(A) \end{pmatrix},$$

où $C = \sum_{k=0}^n k a_k A^k = AP'(A)$. Si B est diagonalisable, alors on choisit P annulateur scindé à racines simples pour B . On a alors $P(A) = 0$ et $AP'(A) = 0$, soit P et XP' annulent A . Or P et P' n'ont aucune racine commune puisque P est à racines simples. La seule racine complexe commune possible entre P et XP' est donc 0. Puisque les valeurs propres de A sont des racines de P et de XP' , la seule valeur propre possible de A est 0. Puisque A est diagonalisable, son polynôme minimal est donc X , ce qui signifie $A = 0$.

Exercice 24.15

1. Les valeurs propres réelles de f sont des racines de P . Il n'y a donc pas de valeurs propres réelles pour f . Si E était de dimension impaire, alors χ_f serait de degré impair et admettrait alors au moins une racine réelle.
2. Soit $F = \text{Vect}(x, y)$. Pour montrer que F est stable par f , il suffit de montrer que $f(x)$ et $f(y)$ sont dans F (par linéarité). On a $f(x) = y - ax \in F$. On a $f(y) = f^2(x) + af(x)$. Or $f^2 + af + b\text{Id} = 0$ donc $f(y) = -bx$. Ainsi F est stable par f .
3. On choisit $x_1 \neq 0$ et on pose $y_1 = f(x_1) + ax_1$ ainsi que $F_1 = \text{Vect}(x_1, y_1)$. On a $f(y_1) = -bx_1$ et $f(x_1) = -ax_1 + y_1$. La matrice de l'endomorphisme induit par f sur F_1 dans la base (y_1, x_1) est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$. On va construire une base de E formée de blocs de cette forme. On suppose qu'on a déjà construit p sous-espaces F_1, \dots, F_p de la forme précédente (avec $F_k = \text{Vect}(x_k, y_k)$ où $y_k = f(x_k) + ax_k$) en somme directe (on l'a fait pour $p = 1$). Soit $G = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$. Si $G = E$, on a fini. Sinon, on considère un vecteur $x \notin G$ et on pose $y = f(x) + ax$ et $F = \text{Vect}(x, y)$. On montre que la somme $F + G$ est directe. Soit $u + (ax + \beta y) = 0$ avec $u \in G$. On a $f(u) + \alpha f(x) + \beta f(y) = 0$. De ces deux équations, on obtient

$$\alpha x + \beta y = -u \text{ et } \alpha(y - ax) + \beta(-bx) = -f(u)$$

soit

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = -u \\ -(\beta b + \alpha a)x + \alpha y = -f(u) \end{cases}$$

la combinaison $\alpha L_1 - \beta L_2$ donne $(\alpha^2 + \alpha a \beta + \beta b^2)x \in G$. Puisque $x \notin G$, cela donne $(\alpha^2 + \alpha a \beta + \beta b^2) = 0$. Si $\beta \neq 0$, alors en posant $t = \alpha/\beta$, on obtient $t^2 + at + b = 0$ ce qui est impossible. Finalement $\beta = 0$, puis $\alpha = 0$ et il reste $u = 0$. La somme est directe. On peut alors poser $x_{p+1} = x$, $y_{p+1} = y$ et $F_{p+1} = F$ et poursuivre le raisonnement jusqu'à arriver à E .

Une autre solution en débordant légèrement du programme.

On note z et \bar{z} les deux racines complexes conjuguées de $X^2 + aX + b$, $n = 2p$ et $A \in M_{2p}(\mathbb{R})$ la matrice de f dans une base de E . On a A annulée par

$P = (X - z)(X - \bar{z})$ donc A est diagonalisable. Les deux complexes sont valeurs propres (sinon on aurait $A = zI_{2p}$ ou $A = \bar{z}I_{2p}$). Si $AX = zX$, alors $A\bar{X} = \bar{z}\bar{X}$. L'application $X \mapsto \bar{X}$ est une bijection linéaire entre $E_z(A)$ et $E_{\bar{z}}(A)$. On note X_1, \dots, X_p une base de $E_z(A)$. Immédiatement $(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_p)$ est une base de vecteurs propres de A et si Q est la matrice de colonnes $X_1, \bar{X}_1, \dots, X_p, \bar{X}_p$ alors $Q^{-1}AQ$ est diagonale de diagonale $z, \bar{z}, \dots, z, \bar{z}$. La matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique P et elle est semblable sur \mathbb{C} à la matrice diagonale de diagonale z, \bar{z} : il existe $R \in M_2(\mathbb{C})$ telle que $R^{-1}CR = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix}$. En considérant la matrice M constituée de p blocs B et la matrice diagonale par blocs S constituée de p blocs R , on a $S^{-1}MS$ diagonale de diagonale z, \bar{z} p fois. Les matrices A et M sont donc semblables dans $M_n(\mathbb{C})$. Puisqu'elles sont toutes les deux dans $M_n(\mathbb{R})$, elles sont semblables dans $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 24.16

- Notons $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ les valeurs propres distinctes (et réelles) de A . Soit Q une matrice inversible telle que $Q^{-1}AQ = D$ où D est la matrice diagonale par blocs

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_k I_{n_k} \end{pmatrix}.$$

On a alors $Q^{-1}A^{2p+1}Q = D^{2p+1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{2p+1} I_{n_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_k^{2p+1} I_{n_k} \end{pmatrix}$. L'application $t \mapsto t^{2p+1}$ est bijective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , donc les réels λ_i^{2p+1}

sont deux à deux distincts. On considère le polynôme d'interpolation de Lagrange P tel que $P(\lambda_i^{2p+1}) = \lambda_i$ pour $i \in \llbracket 1; k \rrbracket$. Ce polynôme existe car les points d'interpolation sont deux à deux distincts. On a alors $P(A^{2p+1}) = QP(D^{2p+1})Q^{-1} = QDQ^{-1} = A$ par construction de P .

- En reprenant le polynôme de la question précédente, on a $A = P(A^{2p+1}) = P(B^{2p+1})$. Ainsi A est un polynôme en B . On en déduit que A et B commutent. Si Q est une matrice inversible telle que $Q^{-1}BQ$ est diagonale, alors $Q^{-1}B^{2p+1}Q$ est diagonale et $P(Q^{-1}B^{2p+1}Q) = Q^{-1}P(B^{2p+1})Q = Q^{-1}AQ$ est diagonale. Les matrices A et B sont donc codiagonalisables (on aurait pu le montrer en utilisant le résultat montré en exercice : si deux matrices sont diagonalisables et commutent alors elles sont simultanément diagonalisables). On a donc $Q^{-1}AQ$ matrice diagonale de diagonale $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ et $Q^{-1}BQ$ matrice diagonale de diagonale β_1, \dots, β_n . Puisque $A^{2p+1} = B^{2p+1}$, on obtient $\alpha_i^{2p+1} = \beta_i^{2p+1}$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. De nouveau, par bijectivité, on en déduit que $\alpha_i = \beta_i$ pour tout i . On a montré que $A = B$.
- Avec $A = I_n$ et $B = -I_n$, on a $A^2 = B^2 = I_n$, les matrices sont diagonalisables mais pas égales.

Exercice 24.17

- 1) \Rightarrow 2) : il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$. Le polynôme X^p est donc annulateur. La seule valeur propre de A est donc 0 (A admet au moins une valeur propre car on travaille dans un \mathbb{C} -espace vectoriel non réduit à $\{0\}$). La matrice A est trigonalisable, avec sur la diagonale les valeurs propres de A . Ainsi A est semblable à une matrice triangulaire supérieure de diagonale nulle.
- 2) \Rightarrow 3) : A est semblable à T triangulaire supérieure de diagonale nulle, et pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k est semblable à T^k . La matrice T^k reste triangulaire supérieure à diagonale nulle, donc est de trace nulle. Ainsi $\text{tr}(A^k) = \text{tr}(T^k) = 0$.
- 3) \Rightarrow 1) : pas du tout évident... on montre d'autres implications.
- 3) \Rightarrow 2) : A est semblable à T triangulaire supérieure. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de A et n_1, \dots, n_p leurs multiplicités respectives. On obtient facilement $\text{tr}(A^k) = \sum_{i=1}^p n_i \lambda_i^k$. Les $p \leq n$ premières équations donnent un système qu'on écrit matriciellement

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_p \\ \lambda_1^2 & & \lambda_p^2 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^p & \dots & \lambda_p^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_p \end{pmatrix} = 0.$$

Le déterminant de la matrice est $\lambda_1 \dots \lambda_p$ multiplié par un déterminant de Vandermonde. Si aucune valeur propre n'est nulle, la matrice est inversible, tous les n_i sont nuls, ce qui est impossible puisque la somme des multiplicités vaut n . L'une des valeurs propres est nulle. Quitte à renuméroter, on peut supposer que c'est la dernière. On écrit alors les $p-1$ premières équations, sans λ_p , ni n_p . Par les arguments précédents, on obtient que toutes les autres multiplicités sont nulles. Finalement A n'a qu'une valeur propre, 0, de multiplicité n . Par trigonalisation, on obtient 2).

- 2) \Rightarrow 1) : le polynôme caractéristique de A est X^n . Il est annulateur, donc $A^n = 0$ et A est nilpotente.

Exercice 24.18

On a $\Phi_u^2(v) = v \circ u^2$, $\Phi_u^k(v) = v \circ u^k$ et, par linéarité, si P est un polynôme $P(\Phi_u)(v) = v \circ P(u)$.

- Supposons que u est diagonalisable et soit P un polynôme annulateur scindé à racines simples de u . Alors $P(\Phi_u) = 0$, si bien que Φ_u est diagonalisable.

→ Supposons que Φ_u est diagonalisable et soit P un polynôme annulateur scindé à racines simples de Φ_u . Alors, pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$, on a $P(\Phi_u)(v) = 0 = v \circ P(u)$. Notamment avec $v = \text{Id}_E$, on obtient $P(u) = 0$ et finalement u est diagonalisable.

Exercice 24.19

On note $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres distinctes de A .

→ Supposons que $P(A)$ est nilpotente. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $P^k(A) = 0$ et ainsi P^k est un multiple de μ_A . Chaque valeur propre de A est racine de P .

→ Réciproquement soit P un polynôme qui admet les λ_i comme racine. Alors P^n est un multiple de χ_A donc $P^n(A) = P(A)^n = 0$.

En conclusion $P(A)$ est nilpotente si et seulement si chaque valeur propre de A est racine de P .

Exercice 24.20

→ On effectue une combinaison linéaire des puissances de A :

$$\sum_{k=0}^p \mu_k A^k = \sum_{i=1}^p \left(\sum_{k=0}^p \mu_k b_i^k \right) B_i.$$

Si on note $Q = \sum_{k=0}^p \mu_k X^k$, alors $Q(A) = \sum_{i=1}^p Q(b_i) B_i$ (pour tout polynôme Q de degré au plus p). En prenant les polynômes d'interpolation de Lagrange aux points b_i , il existe L_i tel que $L_i(b_j) = \delta_{ij}$ et $L_i(A) = B_i$.

→ Avec $R = \prod_{i=1}^p (X - b_i)$ de degré p , scindé à racines simples, on a $R(A) = 0$. La matrice A est donc diagonalisable.

→ Le polynôme $(X - b_i)L_i$ est annulateur de A car tous les b_k sont racines du polynôme $L_i L_j$ et ainsi $(X - b_i)L_i$ est multiple de R (annulateur) donc $(A - b_i I_n)B_i = 0$ soit $AB_i = b_i B_i$. On montre alors par récurrence sur k que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = \sum_{i=1}^p b_i^k B_i$: si la propriété est vraie à un rang k , alors

$$A^{k+1} = A \cdot A^k = A \sum_{i=1}^p b_i^k B_i = \sum_{i=1}^p b_i^k AB_i = \sum_{i=1}^p b_i^{k+1} B_i.$$

Exercice 24.21

1. La matrice B est la matrice de la transposition $\tau = \tau_{1,2}$. On note σ le cycle $(12\dots n)$. La question est donc de savoir quel est le groupe engendré par τ et σ . On peut montrer qu'on peut obtenir toutes les transpositions et finalement toutes les permutations. En effet, $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}$ est la transposition τ_{23} , $\sigma^k \circ \tau \circ \sigma^{-k}$ est la transposition $\tau_{k,k+1}$ si $k < n$ et $\tau_{n,1}$ si $k = n$. On a donc toutes les transpositions $\tau_{i,i+1}$. À partir de ces permutations, on peut créer toutes les transpositions, puis toutes les permutations.
2. (G, \times) est donc isomorphe à (\mathfrak{S}_n, \circ) . Pour tout $g \in G$, on a $g^{n!} = I_n$ et $X^{n!} - 1$ est un polynôme annulateur de g . Les racines réelles sont ± 1 . Ainsi g sera diagonalisable si et seulement si $X^2 - 1$ est annulateur donc si $g^2 = I_n$ (ce sont des produits de transpositions à support disjoint : un élément a de $\llbracket 1; n \rrbracket$ est envoyé sur un autre élément b , qui revient à a avec g (sauf si $b = a$, c'est-à-dire lorsque a est un point fixe)).