CHAPITRE 21 - FONCTIONS VECTORIELLES

Exercice 21.1

On note $C_1(x), \dots, C_n(x)$ les colonnes de $D_n(x)$. On remarque que $C_i'(x) = C_{i+1}(x)$ si $i \in [\![1\,;n-1]\!]$. On peut alors dériver D_n et obtenir

$$D_n'(x) = \det(C_1'(x), C_2(x), \dots, C_n(x)) + \dots + \det(C_1(x), \dots, C_{n-1}'(x), C_n(x)) + \det(C_1(x), \dots, C_{n-1}(x), C_n'(x)).$$

Ces déterminants sont tous nuls (deux colonnes identiques) sauf le dernier. En développant par blocs, on a alors $D_n'(x) = D_{n-1}(x)$. On constate également que $D_n(0) = 0$. Par récurrence simple, on montre alors que $D_n(x) = \frac{x^n}{n!}$.

Exercice 21.2

On note $M = \sup_{x\in[a,b]} \|f'(x)\|$. On a, pour tout $t \in [a,b]$, $f(t) = f(a) + \int_a^t f'(u)\,du = \int_a^t f'(u)\,du$. Cela donne $\left\|f(t)\right\| \leqslant \int_a^t \left\|f'(u)\right\|\,du \leqslant M(t-a)$. En intégrant entre a et b, on obtient

$$\left\|\int_a^b f(t)\,dt\right\| \leqslant M\frac{(b-a)^2}{2}$$

ce qui ne suffit pas. On a cependant

$$\left\|\int_a^{(a+b)/2} f(t)\,dt\right\| \leqslant M\frac{(\frac{a+b}{2}-a)^2}{2} = \frac{(b-a)^2}{8}$$

Le même travail avec $f(t) = f(b) + \int_b^t f'(u)\,du = -\int_t^b f'(u)\,du$ permet d'obtenir

$$\left\|\int_{(a+b)/2}^b f(t)\,dt\right\| \leqslant M\frac{(\frac{a+b}{2}-b)^2}{2} = \frac{(b-a)^2}{8}$$

et finalement le résultat en sommant et avec l'inégalité triangulaire.