CHAPITRE 20 - ESPACES VECTORIELS NORMÉS GÉNÉRALISATIONS

Exercice 20.1

Puisque A et B sont nilpotentes d'indice 2, on a $\exp(A) = I_2 + A + 0 = I_2 + A$ et $\exp(B) = I_2 + B$. On note $J = A + B$. On a $(A+B)^2 = I_2$. Plus généralement, $(A+B)^{2p} = I_n$ et $(A+B)^{2p+1} = J$. Alors

$$\exp(A+B) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p)!} I_2 + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)!} J = \operatorname{ch}(1) I_2 + \operatorname{sh}(1) J.$$

On remarque $\exp(A+B) \neq \exp(A)\exp(B)$ (les matrices A et B ne commutent pas).

Exercice 20.2

- → On trigonalise la matrice A. Il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PTP^{-1}$ où T est triangulaire supérieure, de diagonale $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. On a alors $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.
- → Une récurrence simple montre que T^k est triangulaire supérieure avec, sur la diagonale, les complexes λ_i^k. On note $S_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{A^k}{k!}$. On a $S_p = P\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{T^k}{k!}\right)P^{-1}$ et $\det S_p = \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{p} \frac{\lambda_i^k}{k!}\right)$, dont la limite lorsque p tend vers $+\infty$ est $\prod_{i=1}^{n} \exp(\lambda_i)$.
- → L'application déterminant est continue sur $M_n(\mathbb{C})$, donc $\lim_{p\to+\infty} \det(S_p) = \det(\lim_{p\to+\infty} S_p) = \det(\exp A)$.
- → On en déduit que $\det(\exp A) = \exp(\operatorname{tr} A)$.

Exercice 20.3

On note $\mathbb{K}[M]$ l'ensemble des polynômes en M. C'est un sous-espace vectoriel de $E = M_n(\mathbb{K})$ (de dimension $\deg \Pi_M$, degré du polynôme minimal - y réfléchir). Ainsi $\mathbb{K}[M]$ est une partie fermée de E (sous-espace vectoriel de dimension finie). Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{M^p}{p!} \in \mathbb{K}[M]$, la limite de S_n est encore dans $\mathbb{K}[M]$.

Exercice 20.5

1. Non - il suffit de prendre une matrice triangulaire supérieure de diagonale nulle. On a $\rho(A) = 0$ sans que A soit nulle.
2. Soit λ une valeur propre et X_0 un vecteur propre associé. On a $AX_0 = \lambda X_0$ et, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A^p X_0 = \lambda^p X_0$. Par continuité de $M \mapsto MX_0$, on a $\lim_{p\to+\infty} A^p X_0 = 0$. Ainsi $\lim_{p\to+\infty} \lambda^p X_0 = 0$. Puisque X_0 est fixé non nul, on a $\lim_{p\to+\infty} \lambda^p = 0$, ce qui n'est possible que si $|\lambda| < 1$. Ainsi chaque valeur propre est de module strictement inférieur à 1 et $\rho(A)$ également.
3. On choisit X_0 un vecteur propre pour λ. On a $\|AX_0\| \leqslant \|A\|.\|X_0\|$, si bien que $|\lambda|\|X_0\| \leqslant \|A\|.\|X_0\|$ et $|\lambda| \leqslant \|A\|$. Ceci étant vrai pour toute valeur propre, on a également $\rho(A) = \|A\|$.
4. (a) Supposons que $T = (t_{ij})$ avec $t_{ij} = 0$ si $i > j$. On note u l'endomorphisme canoniquement associé à A et $e_1, \dots, e_n$ les vecteurs dont les coordonnées sont les colonnes $C_1, \dots, C_n$. On note $f_i = \alpha^{i-1} e_i$. On a $u(e_1) = t_{11} e_1$ et $u(f_1) = t_{11} f_1$. Ensuite $u(e_2) = t_{12} e_1 + t_{22} e_2$, ce qui donne $u(f_2) = u(\alpha e_2) = \alpha t_{12} f_1 + t_{22} f_2$. De façon plus générale, on a

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^{j} t_{ij} e_i \text{ et } u(f_j) = \sum_{i=1}^{j} t_{ij} \alpha^{j-1} e_i = \sum_{i=1}^{j} t_{ij} \alpha^{j-i} f_i.$$

La matrice demandée est donc

$$P_\alpha^{-1} A P_\alpha = \begin{pmatrix} t_{11} & \alpha t_{12} & \alpha^2 t_{13} & & \alpha^{n-1} t_{1n} \\ & t_{22} & \alpha t_{23} & \cdots & \alpha^{n-2} t_{2n} \\ & & t_{33} & & \alpha^{n-3} t_{3n} \\ & (0) & & \ddots & \vdots \\ & & & & t_{nn} \end{pmatrix} = T_\alpha.$$

(b) On a $|||M|||_\alpha = \sup\left\{\frac{\|P_\alpha^{-1} M P X\|_\infty}{\|X\|_\infty}, X \in M_{n1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}\right\}$. Cela définit une norme (comme dans le cours). On a, puisque $|||.|||$ est une norme d'algèbre,

$$\begin{aligned} |||MN|||_\alpha &= |||P_\alpha^{-1} M N P_\alpha||| = |||(P_\alpha^{-1} M P_\alpha)(P_\alpha^{-1} N P_\alpha)||| \\ &\leqslant |||P_\alpha^{-1} M P_\alpha||| |||P_\alpha^{-1} N P_\alpha||| = |||M|||_\alpha |||N|||_\alpha. \end{aligned}$$

(c) on montre les implications
→ $iii/ \Rightarrow i/$: si la série converge, le terme général est de limite nulle.

→ $i/ \Rightarrow ii/$: fait.

→ $ii/ \Rightarrow iii/$: avec les notations précédentes, les valeurs propres de A sont $t_{11},\dots,t_{nn}$, et pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $|t_{ii}| < 1$. Puisque $|||A|||_\alpha$ est le maximum des normes 1 des colonnes de T_α, et qu'elles convergent séparément vers $|t_{ii}| \leqslant \rho(A) < 1$ lorsque α tend vers 0, on peut trouver $\alpha > 0$ tel que $|||A|||_\alpha < 1$. D'après le cours, cela garantit la convergence de la série $\sum A^k$ (la somme donne l'inverse de $I_n - A$) pour la norme $|||.|||_\alpha$, et, par conséquent, pour toutes les normes sur E (elles sont équivalentes).

Exercice 20.6

1. Puisque A et I_p commutent, la formule du binôme s'applique et $u_n(A) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} A^k$. On pose alors
$$a_k(n) = \begin{cases} \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} & \text{si} \quad k \leqslant n \\ 0 & \text{si} \quad k > n \end{cases},$$
ce qui permet d'écrire $u_n(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(n) A^k$.
2. La fonction u est définie sur l'ensemble $\mathbb{N}^*$ en tant que somme d'une série de fonctions. On cherche la limite de u lorsque la variable tend vers $+\infty$. On est donc amené à utiliser le théorème de permutation des limites en $+\infty$ lorsque A est la partie $\mathbb{N}^*$ de $\mathbb{R}$. On munit $M_p(\mathbb{R})$ d'une norme d'algèbre. Soit, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $v_k : n \mapsto a_k(n) A^k$. Soit $k \in \mathbb{N}$. On a, lorsque $n \geqslant k$, $a_k(n) = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{1}{k!}$. Cela montre d'une part que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_k(n) = \frac{1}{k!}$ et d'autre part que $|a_k(n)| \leqslant 1/k!$ lorsque $n \geqslant k$. Cette majoration est valable lorsque $n < k$, puisqu'alors $a_k(n)$ est nul. On a montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|v_k(n)\| \leqslant \frac{\|A\|^k}{k!}$, ce qui donne la convergence normale sur $\mathbb{N}^*$ de la série de fonctions $\sum v_k$. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_k(n) = \frac{A^k}{k!}$. Le théorème de permutation des limites donne alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = \exp(A)$.

Exercice 20.7

→ On note u_n la fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ définie par $u_n(x,y) = \frac{1}{n^2} e^{-n(x^2+y^2)}$. La série $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^2$ puisque, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $|u_n(x,y)| \leqslant 1/n^2$. Cela justifie l'existence et la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

→ On s'intéresse maintenant à l'existence et la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ (les variables ayant un rôle symétrique, il suffit d'étudier cette dérivée partielle). Soit $y \in \mathbb{R}$. La fonction $v_n : x \mapsto u_n(x,y)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec $v_n'(x) = -\frac{2x}{n} e^{-nx^2} e^{-ny^2}$. Une étude simple de fonction montre que la fonction $x \mapsto x e^{-nx^2}$ est impaire, positive sur $\mathbb{R}^+$ et présente un maximum pour $x = 1/\sqrt{2n}$. Ainsi, $\|v_n\|_{\infty,\mathbb{R}} = \frac{\sqrt{2}e^{-1/2}}{n^{3/2}} e^{-ny^2} \leqslant \frac{\sqrt{2}e^{-1/2}}{n^{3/2}}$. La série de fonctions $\sum v_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Les autres hypothèses font que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x,y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n} e^{-n(x^2+y^2)}$. Il reste à montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Soit $w_n : (x,y) \mapsto -\frac{2x}{n} e^{-nx^2} e^{-ny^2}$. On applique le théorème de continuité sur $\mathbb{R}^2$ à la série de fonctions continues $\sum w_n$. En utilisant la majoration obtenue précédemment, on a $|w_n(x,y)| \leqslant \frac{\sqrt{2}e^{-1/2}}{n^{3/2}}$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi, $\sum w_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^2$ et $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Le même résultat s'applique à $\frac{\partial f}{\partial y}$. En conclusion, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$).