CHAPITRE 19 - ESPACES VECTORIELS NORMÉS APPLICATIONS LINÉAIRES, CONNEXITÉ

Exercice 19.1

1. Soient (a,b) et (a',b') deux éléments de $A\times B$. Il existe $\gamma_1:[0,1]\to A$ et $\gamma_2:[0,1]\to B$ continues avec $\gamma_1(0)=a,\gamma_1(1)=a'$ et $\gamma_2(0)=b,\gamma_2(1)=b'$.
   Le chemin $\gamma:\left\{\begin{array}{ccc}[0,1] & \longrightarrow & A\times B\\ t & \longmapsto & \big(\gamma_1(t),\gamma_2(t)\big)\end{array}\right.$ est bien continu et relie (a,b) à (a',b') donc $A\times B$ est connexe par arcs.
2. De même, $\widetilde{\gamma}:\left\{\begin{array}{ccc}[0,1] & \longrightarrow & A+B\\ t & \longmapsto & \gamma_1(t)+\gamma_2(t)\end{array}\right.$ est un chemin continu qui relie $a+b$ à $a'+b'$ donc $A+B$ est connexe par arcs.

Exercice 19.2

Soit $A\in\Delta_n$. On va joindre A à I_n. Soit $f(t)=tA+(1-t)I_n$. Si P est inversible et vérifie $P^{-1}AP=D$ diagonale, alors, pour tout $t\in[0,1]$, on a $P^{-1}f(t)P=tD+(1-t)I_n$ diagonale. Pour tout $t\in[0,1]$, $f(t)$ est diagonalisable, et on a $f(0)=I_n$ et $f(1)=A$. L'ensemble Δ_n est bien connexe par arcs.

Exercice 19.3

1. L'application déterminant est continue sur $M_n(\mathbb{R})$. Si $GL_n(\mathbb{R})$ était connexe par arcs, alors son image par det serait connexe par arcs. Or $\det(GL_n(\mathbb{R}))=\mathbb{R}^*$ qui n'est pas connexe par arcs.
2. Soit $z\in\mathbb{C}^*$. Si z ,n'est pas un réel négatif, alors l'application $t\mapsto t+(1-t)z$ (segment) relie 1 et z de façon continue dans $\mathbb{C}^*$. Si $z=-r<0$, alors l'application $t\mapsto r\exp(i\pi t)$ relie de façon continue 1 à z. On peut donc joindre tout point de $\mathbb{C}^*$ à 1, et $\mathbb{C}^*$ est connexe par arcs. Soit $A\in GL_n(\mathbb{R})$. On va montrer qu'on peut relier A à la matrice identité. Il existe P inversible telle que $P^{-1}AP=D+T$ où D est la matrice diagonale $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ avec $\lambda\in\mathbb{C}^*$, et T est triangulaire strictement supérieure. Puisque $\mathbb{C}^*$ est connexe par arcs, il existe des applications continues de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}^*$ telles que $f_i(1)=\lambda_i$ et $f_i(0)=1$. On considère alors la matrice
   $$M(t)=P\,(D_t+tT)\,P^{-1},$$
   où D_t est la matrice diagonale $(f_1(t),\dots,f_n(t))$. On a $\det M(t)=\det D_t$ pour tout t, donc $M(t)$ est inversible pour tout $t\in[0,1]$, $M(0)=I_n$ et $M(1)=A$. On a montré que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Exercice 19.4

il suffit de montrer que l'on peut relier continument un point d de D à un point c de C en restant dans D. Soient donc $d\in D$ et $c\in C$. Considérons une suite $(c_n)_{n\geqslant1}$ d'éléments de C de limite d. On pose $c_0=c$. Soit γ défini sur $]0,1]$ par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \forall t\in\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right],\quad \gamma(t)=(c_{n+1}-c_n)\,\frac{(t-\frac{1}{n})}{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}}+c_n$$

Comme C est convexe, γ est à valeurs dans C; on a de plus γ continu et $\gamma(t)\to d$ quand $t\to0$. Il reste à poser $\gamma(0)=d$ pour conclure.

Exercice 19.6

→ Les deux applications sont linéaires sur un espace de dimension finie. Elles sont donc continues.
→ L'application est bilinéaire sur un produit d'espaces de dimension finie. Elle est donc continue.
→ Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé. On a $A^nX=\lambda^nX$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Considérons une norme sur $M_{p,1}(\mathbb{C})$ ainsi que sa norme subordonnée. On a $\left\|A^nX\right\|\leqslant |||A^n|||\,\|X\|$ mais aussi $\left\|A^nX\right\|=|\lambda|^n\,\|X\|$. La suite (A^n) est bornée ce qui signifie qu'elle l'est pour n'importe quelle norme (elles sont équivalentes). On en déduit que $|\lambda|^n\leqslant |||A^n|||$ et (λ^n) est une suite bornée d'où $|\lambda|\leqslant1$.
→ La suite $B^{2n}=B^nB^n$ converge à la fois vers C^2 (avec la seconde question) et vers C (en tant que suite extraite). Par unicité de la limite $C^2=C$. Puisque (B^n) converge, la suite est bornée et les valeurs propres de B sont de module inférieur à 1. Si λ est une valeur propre de module 1 de B et X un vecteur propre, on a $B^nX=\lambda^nX$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Puisque B^n converge vers C, d'après la première question, B^nX converge vers CX. Ainsi λ^n est convergente si bien que $|\lambda|<1$ ou $\lambda=1$.

Exercice 19.7

→ On vérifie rapidement que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ (c'est même un hyperplan de cet espace). Une fonction de E est bornée, ce qui justifie l'existence de la norme.
→ L'application φ est définie car $\left|\dfrac{f(1/n)}{2^n}\right|\leqslant\dfrac{\|f\|_\infty}{2^n}$ et $\sum\dfrac{1}{2^n}$ converge. De plus, on a immédiatement

$$|\varphi(f)|\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|f(1/n)|}{2^n}\leqslant\|f\|_\infty\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}=1.\|f\|_\infty.$$

Cela donne la continuité de f ainsi que $|||\varphi||| \leqslant 1$.

→ Pour obtenir le cas d'égalité, il faudrait que f soit toujours égale à $\|f\|_\infty$, ce qui pose problème car $f(0)=0$. On construit alors une fonction f_p de E telle que $f(x)=1$ sir $x\in[\frac{1}{p},1]$, $f(0)=0$ et f est linéaire sur $[0,\frac{1}{p}]$ (sur ce segment $f(x)=px$). On a

$$|\varphi(f)| = \sum_{n=1}^{p}\frac{1}{2^n}+\sum_{n=p+1}^{+\infty}\frac{f(1/n)}{2^n} \geqslant \sum_{n=1}^{p}\frac{1}{2^n} = 1-\frac{1}{2^p}.$$

Cela étant vrai pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, on a $|||\varphi||| \geqslant 1$. Finalement $|||\varphi|||=1$.

Exercice 19.8

On note $\varphi : \left\{\begin{array}{lll} E & \to \mathbb{R} & \\ f & \mapsto & f(1/2)\end{array}\right.$. La linéarité de φ se montre facilement. On montre que φ n'est pas continue en 0. On cherche une suite de fonctions (f_n) qui converge vers la fonction $f=0$ pour la norme $\|.\|_1$ telle que $\varphi(f_n)$ ne converge pas vers 0. On prend f_n la fonction nulle sur $[0,1/2-1/n]$ et $[1/2+1/n,1]$, qui vaut 1 en 1/2 et affine sur $[1/2-1/n,1/2]$ et $[1/2,1/2+1/n]$. On a $\|f_n\|_1 = 1/n$ donc (f_n) converge vers la fonction nulle et $\varphi(f_n)=1/2$ de limite non nulle.

Exercice 19.9

L'application existe et est bien linéaire.

→ On a rapidement que $\left|varphi(f)\right| \leqslant \int_0^1 |f(t)[\mathrm{d}t = \|f\|_1$. L'application est continue et de plus $|||\varphi||| \leqslant 1$. Pour f telle que $\|f\|_1=1$, on se rend compte que $\varphi(f)$ vaut $\|f\|_1$ lorsque f est positive sur $[0,1/2]$ et négative sur $[1/2,1]$. Ça laisse pas mal d'exemples disponibles pour avoir le cas d'égalité.

→ On a rapidement que $\left|varphi(f)\right| \leqslant \frac{1}{2}\|f\|_\infty+\frac{1}{2}\|f\|_\infty = \|f\|_\infty$. L'application est continue et de plus $|||\varphi||| \leqslant 1$. On cherche une fonction continue telle que $\|f\|_\infty=1$ et $\varphi(f)=1$. On se rend compte qu'il faut que f soit égale à 1 sur $[0,1/2]$ et -1 sur $[1/2,1]$ ce qui est impossible. On approche alors cette fonction par une fonction f_n, pour $n\geqslant 2$, telle que $f_n(x)=1$ si $x\in[0,\frac{1}{2}-\frac{1}{n}]$, -1 si $x\in[\frac{1}{2}+\frac{1}{n},1]$, et affine entre les deux. On calcule (on peut le faire géométriquement) $\varphi(f_n)=1-\frac{1}{n}$. Ainsi $|||f||| \geqslant \dfrac{|\varphi(f_n)|}{\|f_n\|_\infty} = 1-\frac{1}{n}$. Cela étant vrai pour tout $n\geqslant 2$ donc $|||f||| \geqslant 1$ et finalement la valeur 1.

Exercice 19.10

Pour tout $X\in M_{n1}(\mathbb{C})\setminus\{0\}$, grae à l'inégalité triangulaire, pour $k\in[\![1;n]\!]$,

$$\left|(AX)_k\right| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{p}|a_{kj}|\right)\|X\|_\infty \leqslant \left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{p}|a_{ij}|\right)\|X\|_\infty.$$

En passant au maximum, il vient $\|AX\|_\infty \leqslant \left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{p}|a_{ij}|\right)\|X\|_\infty$ d'où $|||A||| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{p}|a_{ij}| = M$.

Construisons un vecteur X unitaire tel que $\|AX\|_\infty = M$. (on sait, par le cours, la sphère étant compact en dimension finie, que la borne supérieure dans la définition de la norme subordonnée est atteinte).

Soit i_0 tel que $M=\sum_{j=1}^{p}|a_{i_0 j}|$. Écrivons le nombre complexe $a_{i_0 j}$ sous la forme $\left|a_{i_0 j}\right|e^{i\theta_j}$. Posons $X={}^t(e^{-i\theta_1},\cdots,e^{-i\theta_n})$. On a $(AX)_{i_0}=M$ et $\|X\|_\infty=1$. Donc $|||A||| \geq \|AX\|_\infty \geq M$ et finalement $|||A|||=M=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{p}|a_{ij}|$.

Exercice 19.11

→ on commence par choisir une norme sur $\mathscr{L}(E)$. On prend la norme subordonnée $|||u||| = \sup\{\frac{\|u(x)\|}{\|x\|}, x\in E, x\neq 0\}$.

→ on montre que $\mathscr{A}$ est fermé : soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathscr{A}$ de limite u (on a $\lim_{n\to+\infty}|||u_n-u|||=0$). Soit $x\in K$. On a

$$\|u_n(x)-u(x)\| \leqslant |||u_n-u|||\,\|u\|.$$

On en déduit que $u(x)=\lim_{n\to+\infty}u_n(x)$. Puisque $u_n(x)\in K$, sa limite est encore dans le compact - donc fermé - K. Ainsi pour tout $x\in K$, $u(x)\in K$. L'endomorphisme u est encore dans $\mathscr{A}$.

→ on montre que $\mathscr{A}$ est borné : il existe $a\in K$ et $r>0$ tels que $B(a,r)\subset K$. On a également $\overline{B(a,r)}\subset\overline{K}=K$. Le compact K est borné donc il existe M tel que, pour tout $x\in K$, $\|u(x)\|\leqslant M$. Soit $u\in\mathscr{A}$. Si $\|x\|\leqslant r$ alors $u(a+x)\in K$ puisque $a+x\in\overline{B(a,r)}\subset K$. Ainsi,

$$\forall x\in E, \|x\|\leqslant r \Rightarrow \|u(x)\| \leqslant M+\|u(a)\| = C$$

Si $x\neq 0$, le vecteur $r\frac{x}{\|x\|}$ est dans cette boule fermée donc

$$\left\|u\left(r\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leqslant C,$$

ce qui donne $\|u(x)\| \leqslant \frac{C}{r}\|x\|$ pour tout $x \in E$ non nul et également pour $x = 0$. Finalement $|||u||| \leqslant \frac{C}{r}$ et $\mathscr{A}$ est une partie bornée de $\mathscr{L}(E)$. La partie $\mathscr{A}$ est fermée et bornée donc est compacte.

Exercice 19.13

1. voir cours : elles sont équivalentes à la matrice J_r donc équivalentes.
2. le plus simple est de faire un dessin. Si a et b sont deux complexes qui ne sont pas réels. On montre qu'on peut les relier par une droite qui passe par l'axe des réels : les droites qui relient a à un réel ne rencontrent pas les éléments de C sauf pour un nombre fini d'entre elles. De même pour b. Il existe donc des droites qui relient a à un réel x et d'autres qui relient b à ce même x sans rencontrer F. Si l'un est réels on fait de même avec les imaginaires purs (par exemple - on peut aussi relier a et b par des arcs de cercle).
3. Soient A et B de rang r. Il existe $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que $M = PNQ$. Puisque $GL_n(\mathbb{C})$ est connexes par arcs, il existe deux fonctions continues sur $[0,1]$ $t \mapsto Q(t)$ et $t \mapsto P(t)$ avec $Q(0) = I_n$ et $Q(1) = Q$ et de même pour $P(t)$. On note $f(t) = P(t)NQ(t)$. Pour tout $t \in [0,1]$ $f(t)$ est de rang r, $f(0) = N$ et $f(1) = PNQ = M$. On a bien un ensemble connexe par arcs.
4. Si $A \in R_p$ avec $p < n$: On a χ_A qui s'annule en 0. Le polynôme χ_A ne s'annule pas sur un voisinage de 0 ailleurs qu'en 0 donc il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < \eta$, $A - zI_n$ est inversible. Ainsi pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $B \in M_n(\mathbb{C})$ inversible (donc pas dans R_p) telle que $\|A - B\| < \varepsilon$ et aucun point de R_p n'est intérieur. L'intérieur de R_p est vide. Dans le cas de $p = n$, on sait que $GL_n(\mathbb{C})$ est un ouvert (image réciproque de $\mathbb{C}^*$ par le déterminant) donc l'intérieur de R_n est lui même.
5. Pour $p = n$, l'adhérence est $M_n(\mathbb{C})$. On suppose $p < n$. On va montrer que l'adhérence est l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égal à p :
   - → Si A est de rang $r \leqslant p$, il existe P, Q inversible telle que $A = PJ_rQ$. On considère alors $A_k = A + \frac{1}{k}PJ_pQ = P(J_r + \frac{1}{k}J_p)Q$. C'est une suite de matrice de rang p qui converge vers A.
   - → On vérifier que l'ensemble des matrices de rang inférieur à p est fermé : on considère l'application qui à une matrice A quelconque associe l'ensemble de ses mineurs de taille $p+1$ (il y en a un certain nombre, plus précisément $N = \binom{n}{p+1}^2$). L'application, qui va de $M_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}^N$ est continue car chaque composante est polynomiale. L'image réciproque de $0_{\mathbb{C}^N}$ est un fermé qui est l'ensemble des matrices de rang au plus p.