CHAPITRE 16 - SUITES DE FONCTIONS

Exercice 16.3

1. Pour $x=0$, on a $f_n(0)=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ donc $f_n(0)$ converge vers 0. Pour $x\neq 0$, $f_n(x)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2^n x}{n2^n x^2}=\frac{1}{nx}$ d'où convergence simple vers 0. La suite de fonction converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}$.
2. On a une primitive presque immédiate de f_n :
$$\int_0^1 f_n(x)\,dx=\left[\frac{1}{2n}\ln(1+n2^n x^2)\right]_0^1=\frac{1}{2n}\ln(1+n2^n).$$
Puisque $n2^n$ est de limite infinie, on a $\int_0^1 f_n(t)\,dt\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\ln(n2^n)}{2n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{n\ln 2}{2n}$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(t)\,dt=\frac{\ln 2}{2}$. La convergence n'est donc pas uniforme sur $[0,1]$ sinon, par permutation limite-intégrale, on aurait $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(t)\,dt=0$.
3. On peut bien évidemment étudier la fonction pour obtenir ses variations et obtenir $\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[}$. Plus simplement, pour $x\geqslant a$, on majore $0\leqslant f_n(x)\leqslant\frac{2^n x}{n2^n x^2}=\frac{1}{nx}\leqslant\frac{1}{na}$. Cela donne une majoration uniforme de $|f_n|$ sur $[a,+\infty[$ par un terme qui tend vers 0. La convergence est uniforme sur $[a,+\infty[$.

Exercice 16.5

1. Pour $x\in\mathbb{R}$, on a $\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=\sin x$.
2. On étudie la différence (avec $\sin p-\sin q=2\sin\frac{p-q}{2}\sin\frac{p+q}{2}$) :
$$\left|\sin\left(\frac{n+1}{n}x\right)-\sin x\right|=2\left|\sin\frac{x}{2n}\sin\left(\frac{2n+1}{2n}x\right)\right|\leqslant 2\left|\sin\frac{x}{2n}\right|\leqslant\frac{|x|}{n}\leqslant\frac{A}{n}$$
On peut aussi utiliser l'inégalité des accroissements finis ($\sin a-\sin b|\leqslant 1.|a-b|$). On a donc $\|f_n-f\|_{\infty,[-A,A]}\leqslant\frac{A}{n}$ de limite nulle. La convergence est bien uniforme sur les segments $[-A,A]$ (et donc sur tous les compacts de $\mathbb{R}$ qui sont tous contenus dans un tel segment).
3. On cherche x_n tel que $\|f_n-f\|_\infty\geqslant|f_n(x_n)-f(x_n)$ soit minoré/tend vers autre chose que 0. On a, avec $x_n=n\frac{\pi}{2}$,
$$|f_n(x_n)-f(x_n)|=|\sin((n+1)\frac{\pi}{2})-\sin n\frac{\pi}{2}|=1.$$

Exercice 16.6

1. On a
$$g_n'(t)=e^t\left((1-\frac{t}{n})^n-\frac{n}{n}(1-\frac{t}{n})^{n-1}\right)=e^t(1-\frac{t}{n})^{n-1}(1-\frac{t}{n}-1)=-\frac{t}{n}e^t(1-\frac{t}{n})^{n-1}.$$
Puisque $t\in[0,1]$, on a facilement $|g_n'(t)|\leqslant\frac{e^t}{n}$. On utilise l'inégalité des accroissements finis sur $[0,t]$. La dérivée g_n' est majorée en valeur absolue sur $[0,t]$ par $\frac{e^t}{n}$, si bien qu'on a $|g_n(0)-g_n(t)|\leqslant t\frac{e^t}{n}$. En multipliant par e^{-t}, on obtient $|e^{-t}-(1-\frac{t}{n})^n|\leqslant\frac{t}{n}$.
2. On commence par l'existence de $I_n(x)$: la fonction $t\mapsto t^x(1-\frac{t}{n})^n$. Cette fonction est continue sur $]0,1]$ et est équivalente en 0 à t^x, intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $x>-1$. les fonctions I_n sont définies sur $]-1,+\infty[$. On s'intéresse directement à la différence avec la fonction limite attendue : on note $I(x)=\int_0^1 t^x e^{-t}\,dt$. Pour les mêmes raisons, cette fonction est définie sur $]-1,+\infty[$. Plutôt que de justifier la convergence simple de la suite de fonctions vers I en utilisant le théorème de convergence dominée, on évalue directement la différence (la question précédente permet de l'évaluer facilement) :
$$|I_n(x)-I(x)|\leqslant\int_0^1 t^x\left|(1-\frac{t}{n})^n-e^{-t}\right|dt\leqslant\frac{1}{n}\int_0^1 t^{x+1}\,dt=\frac{1}{n(x+2)}.$$
D'une part, à x fixé, on a bien une différence de limite nulle, d'où la convergence simple de (I_n) vers I sur $]-1,+\infty[$, d'autre part, pour tout $x>-1$, on a également $x+2>1$ d'où $|I_n(x)-I(x)|\leqslant\frac{1}{n}$. On a donc convergence uniforme de (I_n) vers I sur $]-1,+\infty[$.

Exercice 16.7

1. Chaque K_n est fermé et borné donc compact. Supposons que K_n est non vide pour tout $n\in\mathbb{N}$. Il existe alors $x_n\in K_n\subset[a,b]$. De cette suite, on peut extraire une suite convergente $x_{\varphi(n)}$ de limite $\ell\in[a,b]$. On montre que ℓ est dans tous les compacts donc dans leur intersection. En effet soit $n_0\in\mathbb{N}$. Pour $n\geqslant n_0$, on a $\varphi(n)\geqslant n\geqslant n_0$ et $x_{\varphi(n)}\in K_{\varphi(n)}\subset K_{n_0}$. Puisque K_{n_0} est fermé, la limite de $x_{\varphi(n)}$ est dans K_{n_0} et ce pour tout $n_0\in\mathbb{N}$. Finalement ℓ est dans l'intersection des compacts qui est donc non vide.
2. Soit $g_n=f-f_n$, fonction continue sur $[a,b]$. Pour tout $x\in[a,b]$, la suite $(g_n(x))$ est décroissante vers 0. Soit $\varepsilon>0$. Pour tout $N\in\mathbb{N}$, on considère $K_N=\{x\in[a,b],g_N(x)\geqslant\varepsilon\}$. L'ensemble K_N est compact : $K_N=g_N^{-1}([\varepsilon,+\infty[)$ qui est fermé et K_N est borné. La suite K_N est décroissante car g_N est décroissante : on a $g_{N+1}(x)\leqslant g_N(x)$ et si $g_{N+1}(x)\geqslant\varepsilon$ alors $g_N(x)\geqslant\varepsilon$. Enfin l'intersection des K_N est vide. En effet

puisque (g_N) converge simplement vers 0 alors, pour tout $x \in [a,b]$, il existe n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant g_n(x) < \varepsilon$ donc x n'est pas dans tous les K_N. On se retrouve dans la situation de la question 1 et il existe N_0 tel que K_{N_0} est vide, c'est-à-dire que pour tout $x \in [a,b]$, $0 \leqslant g_{N_0}(x) \leqslant \varepsilon$ et par décroissante cela reste vrai pour tout $N \geqslant N_0$. Pour $\varepsilon > 0$, on a trouvé $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $N \geqslant N_0$ et tout $x \in [a,b]$, $|g_N(x)| < \varepsilon$. La convergence de (g_n) vers 0 est uniforme sur $[a,b]$.

Exercice 16.8

1. Soit $x, y \in [a,b]$. On a $|f_n(x) - f_n(y)| \leqslant K|x-y|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En passant à la limite (simple), on obtient $|f(x) - f(y)| \leqslant K|x-y|$ et f est bien K-lipschitzienne.
2. On va controler la convergence en un nombre fini de points et utiliser le caractère lipschitzien pour les autres. On se donne $\varepsilon > 0$. On fixe $N \in \mathbb{N}$ tel que $K\dfrac{b-a}{N} < \frac{\varepsilon}{3}$. On note $x_i = a + i\dfrac{b-a}{N}$. Pour chaque $i \in [\![0;N]\!]$, il existe $n_i \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geqslant n_i$, $|f_n(x_i) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{3}$. On note $N' = \max(n_i)$. Pour tous les points x_i de $|a,b]$, si $n \geqslant N'$, on a $|f_n(x_i) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Soit $x \in [a,b]$. Il existe $i \in [\![0;n-1]\!]$ tel que $x \in [x_i, x_{i+1}]$. On a alors
$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant |f_n(x) - f_n(x_i)| + |f_n(x_i) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x)| \leqslant 2K(x - x_i) + \frac{\varepsilon}{3}.$$
Puisque $|x - x_i| \leqslant |x_{i+1} - x_i| = \dfrac{b-a}{N}$, on a $K(x - x_i) \leqslant K\dfrac{b-a}{N} < \frac{\varepsilon}{3}$. On obtient finalement $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, et ce, pour tout $x \in [a,b]$. La convergence est donc uniforme.

Exercice 16.9

On fixe $N+1$ points $x_0, x_1, \dots, x_N$ distincts de $[a,b]$ et on considère les polynômes d'interpolation de Lagrange en ces points qu'on note $L_0, L_1, \dots, L_N$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P_n = \sum\limits_{i=0}^{N} P_n(x_i)L_i$. Soit $x \in [a,b]$. On a $P_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{N} P_n(x_i)L_i(x)$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{N} f(x_i)L_i(x)$. Ainsi la suite P_n converge simplement vers la fonction $g : x \mapsto \sum\limits_{i=0}^{N} f(x_i)L_i(x)$. Par unicité de la limite $f = g$, ce qui donne f polynomiale de degré au plus N. De plus
$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant \sum_{i=0}^{N} |f(x_i) - P(x_i)| L_i(x).$$
En notant $\ell_i = \|L_i\|_{\infty,[a,b]}$, on a $|f(x) - P_n(x)| \leqslant \sum\limits_{i=0}^{N} \ell_i |f(x_i) - P(x_i)|$, indépendant de x, si bien que $\|f - P_n\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \sum\limits_{i=0}^{N} \ell_i |f(x_i) - P(x_i)|$, de limite nulle lorsque n tend vers $+\infty$. La convergence est donc uniforme sur $[a,b]$.

Exercice 16.11

On ne le dira pas à chaque fois mais toutes les fonctions qui apparaissent (fonctions, limites simples, fonctions dominantes) sont continues sur $\mathbb{R}^+$.

1. On note $f_n(x) = f(x)e^{-nx}$. La suite de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction nulle partout sauf en 0. Si on note M un majorant de $|f|$ sur $\mathbb{R}^+$, on a, pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x \geqslant 0$, $|f_n(x)| \leqslant Me^{-x}$ et $x \mapsto Me^{-x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On peut appliquer le théorème de convergence dominée et obtenir $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.
On effectue le changement de variable linéaire « $u = nx$ ». Cela donne
$$nI_n = \int_0^{+\infty} f\left(\frac{u}{n}\right) e^{-u}\mathrm{d}u.$$
On note $g_n(u) = f\left(\frac{u}{n}\right)e^{-u}$. On a convergence simple vers $g : x \mapsto f(0)e^{-u}$ et domination par Me^{-u}. On a donc
$$\lim_{n\to+\infty} nI_n = \int_0^{+\infty} f(0)e^{-u}\mathrm{d}u = f(0).$$
2. On a
$$nI_n - L = \int_0^{+\infty} \left(f\left(\frac{u}{n}\right) - f(0)\right) e^{-u}\mathrm{d}u$$
Pour $u \geqslant 0$ fixé, on a $f\left(\frac{u}{n}\right) - f(0) \underset{n\to+\infty}{\sim} f'(0)\frac{u}{n}$. On s'attendrait à avoir
$$nI_n - L \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_0^{+\infty} f'(0)\frac{u}{n} e^{-u}\mathrm{d}u$$
On étudie $n(nI_n - L) = \displaystyle\int_0^{+\infty} h_n(u)\mathrm{d}u$ où $h_n(u) = n\left(f\left(\frac{u}{n}\right) - f(0)\right)e^{-u}$. Pour tout $u \geqslant 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n(u) = uf'(0)e^{-u}$. Pour la domination, on note M_1 un majorant de $|f'|$ sur $\mathbb{R}^+$. Avec l'inégalité des accroissements finis, on a, pour tout $u \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $|h_n(u)| \leqslant nM_1\frac{u}{n}e^{-u} = M_1 ue^{-u}$. Puisque $u \mapsto ue^{-u}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit le résultat voulu. Avec $\displaystyle\int_0^{+\infty} ue^{-u}\mathrm{d}u = 1$, on a
$$nI_n - f(0) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}f'(0) \text{ ou encore } I_n = \frac{1}{n}f(0) + \frac{1}{n^2}f'(0) + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 16.13

→ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f_n : t \mapsto \ln(1-t^n)$ est continue sur $[0,1[$. On a

$$\ln(1-t^n) = \ln(1-t) + \ln(1+t+\ldots+t^{n-1}) \underset{t\to 1}{\sim} \ln(1-t).$$

La fonction $t \mapsto \ln t$ est intégrable sur $]0,1]$, et, par symétrie, la fonction $t \mapsto \ln(1-t)$ est intégrable sur $[0,1[$. On en déduit l'existence de I_n.

→ Pour tout $t \in [0,1[$, on a $\lim_{n\to+\infty} \ln(1-t^n) = 0$. La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle (continue sur $[0,1[$). Enfin, si $t \in [0,1[$, on a $0 \leqslant t^n \leqslant t < 1$ et

$$\ln(1-t) \leqslant \ln(1-t^n) \leqslant 0.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,1[$, on a $|f_n(t)| \leqslant |\ln(1-t)| = |f_1(t)|$. La fonction f_1 étant intégrable sur $[0,1[$, le théorème de convergence dominée s'applique et

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.$$

→ On effectue le changement de variable $u = t^n$ dans l'intégrale ($t \mapsto t^n$ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $]0,1[$ sur lui-même). Cela donne

$$I_n = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u} u^{1/n}\, du.$$

On applique le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $g_n : u \mapsto \frac{\ln(1-u)}{u} u^{1/n}$. On a une domination par $|g_n(u)| \leqslant \left|\frac{\ln(1-u)}{u} u\right|$, fonction continue et intégrable sur $]0,1[$. On obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u} u^{1/n}\, du = \int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u}\, du = C < 0.$$

Ainsi $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C}{n}$.