CHAPITRE 15 - RÉDUCTION (PREMIÈRE PARTIE)

Exercice 15.1

On vérifie rapidement que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ (mais pas de $\mathbb{R}_n[X]$ en général car le degré de $f(P)$ est la plupart du temps strictement supérieur à celui de P). Pour déterminer les éléments propres, on examine l'équation $f(P) = \lambda P$. Si P est de degré exactement n : $P = a_n X^N + \cdots$ avec $a_n \neq 0$. Le terme de degré $n+2$ de $f(P) - \lambda P$ est $na_n - 3a_n = (n-3)a_n$. Il doit être nul donc $n = 3$. Un polynôme propre est donc de degré 3. On prend $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$. On a

$$\begin{aligned} f(P) &= (X^3+X)(3aX^2+2bX+c) - (3X^2-1)(aX^3+bX^2+cX+d) \\ &= (2b-3b)X^4 + (c+3a-3c+a)X^3 + (2b-3d+b)X^2 + (c+c)X + d \\ &= -bX^4 + (4a-2c)X^3 + (3b-3d)X^2 + 2cX + d \end{aligned}$$

On doit alors résoudre $f(P) = \lambda P$. Par unicité de l'écriture d'un polynôme dans la base canonique, on obtient les équations

$$b = 0; 4a-2c = \lambda a; 3b-3d = \lambda b; 2cX = \lambda c; d = \lambda d$$

Ce système d'équations est équivalent à $b = d = 0; (4-\lambda)a = 2c; (2-\lambda)c = 0$.

→ si λ ne vaut ni 2, ni 4 alors a et c sont aussi nuls et $P = 0$.
→ si $\lambda = 2$, il reste $a = c$. Le réel 2 est valeur propre et l'espace propre associé est $\mathrm{Vect}(X^3 + X)$.
→ si $\lambda = 4$, alors $c = 0$ et a quelconque. Le réel 4 est valeur propre et l'espace propre associé est $\mathrm{Vect}(X^3)$.

Exercice 15.2

On utilise les opérations par blocs :

$$\begin{aligned} \chi_C(x) &= \begin{vmatrix} xI_n - A & -B \\ -B & xI_n - A \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} xI_n - A & -B \\ xI_n - (A+B) & xI_n - (A+B) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} xI_n - (A-B) & -B \\ 0 & xI_n - (A+B) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

en effectuant les opérations par blocs $L_2 \to L_2 + L + 1$ puis $C_1 \to C_1 - C_2$. Le déterminant vaut alors $\det(xI_n - (A+B)).\det(xI_n - (A-B))$, ce qui donne $\chi_C = \chi_{A+B} \cdot \chi_{A-B}$.

Exercice 15.3

Puisque χ_f est scindé (sur $\mathbb{C}$), l'endomorphisme f admet au moins une valeur propre λ. Considérons $F = E_\lambda(f)$. Cet espace est de dimension au minimum 1 et tout vecteur non nul de F est un vecteur propre de f. On montre que g admet un vecteur propre dans F : puisque f et g commutent, F est stable par g. L'endomorphisme induit g_F est un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $\dim F \geqslant 1$, donc admet une valeur propre μ. Soit x un vecteur propre associé, il vérifie $g_F(x) = g(x) = \mu x$ mais également $f(x) = \lambda x$ puisque $x \in F$. Ainsi f et g ont un vecteur propre en commun.

Exercice 15.4

1. On obtient le polynôme caractéristique $\chi_A = (X-3)(X+2)$ et donc $\mathrm{Sp}A = \{-2, 3\}$ et $E_3 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ et $E_{-2} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}\right)$.
2. On effectue le produit avec une matrice quelconque $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Après calcul, on obtient $ND = DN$ si et seulement si $b = c = 0$, soit N est diagonale.
3. Pour déterminer les matrices qui commutent avec A, on effectue la travail « en changeant de base »- on utilise la même relation de similitude : on a $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Soit $M \in M_2(\mathbb{R})$. On a $AM = MA \Leftrightarrow PDP^{-1}M = MPDP^{-1} \Leftrightarrow D(P^{-1}MP) = (P^{-1}MP)D \Leftrightarrow P^{-1}MP$ commute avec D, c'est-à-dire, $AM = MA \Leftrightarrow P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}P^{-1}$. L'espace des matrices commutant avec A est donc
$$C(A) = \left\{ P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}P^{-1} \text{ avec } (a,d) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$
Pour justifier que $C(A) = \mathrm{Vect}(I_2, A)$, on a au moins deux possibilités :
→ on effectue les calculs (bof)
→ on remarque que $\mathrm{Vect}(I_2, A)$ est contenu dans $C(A)$ et que les deux sous-espaces vectoriels ont même dimension.

Exercice 15.5

1. On regarde la dimension de l'espace engendré par l'image de la base e : si $v=0$ alors le rang de f est nul, sinon il vaut 1.
2. Lorsque $v=0$, f est nulle donc diagonalisable. Sinon $\operatorname{rg} f = 1$ et $\dim\ker f = n-1$. Ainsi 0 est valeur propre de f d'ordre de multiplicité dans le polynôme caractéristique au moins $n-1$. On en déduit alors que
$$\exists \lambda \in \mathbb{K}, P_f(X) = X^{n-1}(X-\lambda).$$
En examinant le coefficient de degré $n-1$, on a $\operatorname{tr} f = \lambda$, si bien que $P_f = X^{n-1}(X-\operatorname{tr} f)$. On discute suivant cette trace :
   - → si $\operatorname{tr} f \neq 0$, alors c'est une seconde valeur propre ; elle est de multiplicité 1 donc l'espace propre associé est de dimension 1. La somme des dimensions des espaces propres vaut n et f est diagonalisable.
   - → si $\operatorname{tr} f = 0$, alors $P_f = X^n$. La valeur propre 0 est de multiplicité n et l'espace propre associé est de dimension $n-1$. L'endomorphisme n'est pas diagonalisable.

Exercice 15.9

1. Par un simple développement par rapport à la première colonne, on trouve $\chi_{J_n} = X^n - 1$. Ce polynôme caractéristique est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$. La matrice est diagonalisable avec n valeurs propres simples qui sont les racines n-ièmes de l'unité. On note $\omega = e^{2i\pi/n}$. Il existe P inversible telle que $J_n = PDP^{-1}$ avec $D = \operatorname{diag}(1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1})$.
2. Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à J_n. Si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{C}^n$, alors $f(e_i) = e_{i-1}$ avec la convention $e_k = e_{n-k}$ si $k \leqslant 0$. On en déduit que J_n^k est une matrice du même type avec la diagonale de 1 qui se déplace, jusqu'à $J_n^n = I_n$. On en déduit que $A = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J_n^k = Q(J_n)$ où $Q = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. Puisque $J_n = PDP^{-1}$, on a $J_n^k = PD^kP^{-1}$ ainsi que $A = Q(J_n) = PQ(D)P^{-1}$. On en déduit que
$$\det A = \det Q(D) = \prod_{k=0}^{n-1} Q(\omega^k).$$

Exercice 15.10

1. Il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de p est diagonale $\begin{pmatrix} I_r & (0) \\ (0) & 0_{n-r} \end{pmatrix}$. La matrice de $\mathrm{Id}_E + \lambda p$ dans cette base est alors $\begin{pmatrix} (1+\lambda) I_r & (0) \\ (0) & I_{n-r} \end{pmatrix}$ dont le déterminant est $(1+\lambda)^r$.
2. Si V est nul, alors $\operatorname{rg} B = 0$, sinon la matrice B a toutes ses colonnes proportionelles et $\operatorname{rg} B = 1$.
3. La matrice B est symétrique réelle donc diagonalisable. On peut le faire sans utiliser cela. Le réel 0 est valeur propre avec un sous-espace propre de dimension $n-1$. La multiplicité de la racine est donc au moins $n-1$ et $\chi_B = X^{n-1}(X-\alpha)$. En développant, on trouve que $\alpha = \operatorname{tr} B = \sum_{i=1}^n a_i^2 > 0$. Finalement B admet deux valeurs propres, 0 avec un espace propre de dimension $n-1$ et $\sum_{i=1}^n a_i^2$ avec un espace propre de dimension 1. La matrice B est diagonalisable
4. On note $\alpha = \operatorname{tr} B = \sum_{i=1}^n a_i^2 > 0$. On remarque que $M = I_n + B$. On peut s'inspirer de la première question pour obtenir un déterminant $1+\alpha$. On peut aussi remarquer que $B/\alpha = C$ est la matrice d'un projecteur de rang 1. Ainsi $M = I + \alpha C$ et on retrouve le déterminant directement avec la question 1.

Exercice 15.11

1. on discute suivant la dimension du sous-espace stable :
   - → les seuls espaces stables de dimension 0 et 3 sont respectivement $\{0\}$ et $\mathbb{R}^3$.
   - → les sous-espaces stables de dimension 1 sont les droites dirigées par un vecteur propre. On détermine les espaces propres de M. On trouve une seule valeur propre réelle qui est 1 et un espace propre associé qui est la droite dirigée par $(1,1,1)$. Cette droite est donc la seule droite stable par M.
   - → Un plan d'équation $ax+by+cz=0$ est stable si et seulement si le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est vecteur propre de ${}^tA$. La matrice a les mêmes valeurs propres que A. L'espace propre associé est $\operatorname{Vect}((1,0,1))$. Ainsi le seul plan stable est le plan d'équation $x+z=0$.
2. C'est le cas ici car la droite propre et le plan stable sont supplémentaires (le vecteur $(1,1,1)$ n'est pas dans le plan).

Exercice 15.12

1.
   - → on justifie que F est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$. Soit H une primitive de f sur $\mathbb{R}^+$ (f est continue sur $\mathbb{R}^+$). Pour tout $x>0$, $F(x) = \dfrac{H(x)-H(0)}{x-0}$ donc F est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\lim_{x\to 0} F(x) = H'(0) = f(0)$. Ainsi F est continue sur $\mathbb{R}^+$ et T est bien une application de E dans E.

→ on prouve la linéarité : soient f et g dans E et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $T(f+\lambda g)(0) = (f+\lambda g)(0) = (Tf+\lambda Tg)(0)$. Si $x > 0$, alors on a également, par linéarité de l'intégrale, $T(f+\lambda g)(x) = (Tf+\lambda Tg)(x)$. Finalement $T(f+\lambda g) = Tf+\lambda Tg$ est T est un endomorphisme de E.

2. Soit λ une valeur propre de T et $f \neq 0$ telle que $Tf = \lambda f$. On a $f(0) = \lambda f(0)$ et, pour tout $x > 0$, $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \lambda f(x)$. La première relation donne $\lambda = 1$ ou $f(0) = 0$. On s'intéresse à la seconde. La fonction Tf est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ donc λf également.
   → si $\lambda = 0$, alors pour tout $x > 0$, $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = 0$ donc, pour tout $x > 0$, $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = 0$ et en dérivant f est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ donc sur $\mathbb{R}^+$ par continuité. Le réel $\lambda = 0$ n'est pas valeur propre.
   → si $\lambda \neq 0$, en divisant par λ, on obtient que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On a alors, pour tout $x > 0$,
   $$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \lambda x f(x).$$
   On peut dériver et obtenir, pour tout $x > 0$, $f(x) = \lambda f(x) + \lambda x f'(x)$ et ainsi f est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle
   $$xy' + (1-\frac{1}{\lambda})y = 0$$
   On résout cette équation sur $\mathbb{R}_+^*$: il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x > 0$, $f(x) = A\exp\left(-(1-\frac{1}{\lambda})\ln x\right) = Ax^{\frac{1}{\lambda}-1}$. On veut que f soir continue sur $\mathbb{R}_+$ ce qui impose $\frac{1}{\lambda} - 1 \geqslant 0$ soit $0 < \lambda \leqslant 1$. Réciproquement ces fonctions conviennent.

   Bilan : les valeurs propres de T sont les réels dans $]0,1]$ et pour $\lambda \in]0,1]$, l'espace propre associé est $\mathrm{Vect}(f_\lambda)$ où $f_\lambda(x) = x^{\frac{1}{\lambda}-1}$.

Exercice 15.13

On cherche à résoudre l'équation $p\circ f + f\circ p = \lambda f$. Ce n'est pas immédiat sous cette forme (mais faisable). On voit mieux ce qu'il se passe matriciellement. On choisit une base $\mathscr{B}$ de E adaptée au projecteur p : on a $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $F = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ (avec les tailles correspondantes). On écrit la relation $FP + PF = \lambda F$. On obtient
$$\begin{pmatrix} 2A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$
ou encore
$$\begin{pmatrix} (2-\lambda)A & (1-\lambda)B \\ (1-\lambda)C & -\lambda D \end{pmatrix} = 0.$$
Si λ est différent de $0, 1$ et 2, alors $F = 0$.

→ cas $\lambda = 0$: on a $A = B = C = 0$ et D quelconque. On en déduit que E_0 est de dimension $(n-r)^2$, constitué par les endomorphismes dont la matrice F est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$.

→ cas $\lambda = 1$: on trouve que E_1 est de dimension $2r(n-r)$, constitué par les endomorphismes dont la matrice F est $\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$.

→ cas $\lambda = 2$: on trouve que E_2 est de dimension r^2, constitué par les endomorphismes dont la matrice F est $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La somme des dimensions des espaces propres et $(r+n-r)^2 = n^2$. L'application est diagonalisable.

Exercice 15.14

On note $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, ainsi que $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ une base de vecteurs propres pour B, associés aux valeurs propres α et β. On note enfin $(Y_1, \dots, Y_n)$ une base de vecteurs propres pour A associés aux valeurs propres $\mu_1, \dots, \mu_n$. On cherche un vecteur propre pour A sous la forme conseillée :
$$M.\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aAX_1 + bAX_2 \\ cAX_1 + dAX_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}.$$
On se doute qu'on va créer des vecteurs propres en utilisant les vecteurs propres de A. Si on essaie avec $X_1 = X_2 = Y_i$, on obtient
$$M.\begin{pmatrix} Y_i \\ Y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+b)\mu_i Y_i \\ (c+d)\mu_i Y_i \end{pmatrix},$$
mais ce vecteur n'est pas, en général, colinéaire à $\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}$ (c'est pire si on choisit $X_1 = Y_i$ et $X_2 = Y_j$ avec $i \neq j$. On change légèrement ce vecteur en le cherchant sous la forme $\begin{pmatrix} k_1 Y_1 \\ k_2 Y_1 \end{pmatrix}$. On obtient
$$M.\begin{pmatrix} k_1 Y_i \\ k_2 Y_i \end{pmatrix} = \mu_i \begin{pmatrix} (ak_1 + bk_2)Y_i \\ (ck_1 + dk_2)Y_i \end{pmatrix},$$

et dire que ce vecteur est propre revient à dire que $\begin{pmatrix} ak_1+bk_2 \\ ck_1+dk_2 \end{pmatrix}$ est colinéaire à $\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$, donc que ce dernier vecteur est un vecteur propre de B. On va alors considérer les n vecteurs $\begin{pmatrix} x_1 Y_i \\ y_1 Y_i \end{pmatrix}$, propres pour M pour la valeur propre $\alpha\mu_i$) et les n vecteurs $\begin{pmatrix} x_2 Y_i \\ y_2 Y_i \end{pmatrix}$, propres pour M pour la valeur propre $\beta\mu_i$. Il reste à montrer que ces $2n$ vecteurs sont linéairement indépendants pour obtenir une base de vecteurs propres de M. On effectue une combinaison linéaire

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \begin{pmatrix} x_1 Y_i \\ y_1 Y_i \end{pmatrix} + d_i \begin{pmatrix} x_2 Y_i \\ y_2 Y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} (c_i x_1 + d_i x_2) Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} (c_i y_1 + d_i y_2) Y_i \end{pmatrix} = 0.$$

Par indépendance de la famille $(Y_1, \dots, Y_n)$, on obtient les $2n$ équations $c_i x_1 + d_i x_2 = 0$ et $c_i y_1 + d_i y_2 = 0$ pour $i \in [\![1\,;n]\!]$, c'est-à-dire les n systèmes

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice étant inversible (base de vecteurs propres pour B), les scalaires c_i et d_i sont nuls. Cela termine la démonstration.

Exercice 15.15

→ On montre facilement que φ est un endomorphisme de E (la seule petite difficulté est de justifiier que les éventuels termes de degré $2n+1$ disparaissent).

→ On pourrait écrire la matrice de l'endomorphisme dans la base canonique, mais cela ne donne rien de bien intéressant. Soit P un polynôme non nul et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $\varphi(P) = \lambda P$. on va considérer cette relation comme une équation différentielle sur $]1,+\infty[$ (on peut identifier polynôme et fonction polynôme sur un tel intervalle - la résolution de l'équation différentielle se fait facilement sur un intervalle sur lequel (x^2-1) ne s'annule pas, et on choisit $]1,+\infty[$ pour que $x-1$ et $x+1$ soient positifs. Ainsi $\varphi(P) = \lambda P$ si, et seulement si,

$$\forall x \in]1,+\infty[, (x^2-1)P'(x) = (2nx+\lambda)P(x).$$

On décompose la fraction rationnelle :

$$\forall x \in]1,+\infty[, \frac{2nx+\lambda}{x^2-1} = \frac{n+\lambda/2}{x-1} + \frac{n-\lambda/2}{x+1}.$$

Cela donne, pour tout $x \in]1,+\infty[$,

$$P(x) = C\exp\left((n+\frac{\lambda}{2})(x-1) + (n-\frac{\lambda}{2})(x+1)\right) = C(x-1)^{n+\lambda/2}(x+1)^{n-\lambda/2}.$$

On n'obtient pas forcément un polynôme. C'est le cas lorsque $n \pm \frac{\lambda}{2}$ sont deux entiers. Puisque la somme des deux exposants vaut $2n$, il suffit que l'un soit un entier entre 0 et $2n$ pour que l'autre le soit également. Supposons que $\lambda/2 = p \in [\![-n\,;n]\!]$. On a $\lambda_p = 2p$ qui est valeur propre avec des polynômes propres associés $P = C(X-1)^{n+p}(X+1)^{n-p}$. On obtient ainsi $2n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes, avec pour chacune un espace propre de dimension 1. Puisque E est de dimension $2n+1$, on en déduit que φ est diagonalisable, possède $2n+1$ valeurs propres simples et chaque espace propre est de dimension 1.

Exercice 15.16

1. Soit $x = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ un vecteur propre de V pour la valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Cela revient à $V.x = \lambda x$, c'est-à-dire

$$\left\{\begin{array}{lcl} Y & = & \lambda X \\ UX & = & \lambda Y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} Y & = & \lambda X \\ UX & = & \lambda^2 X \end{array}\right.$$

Pour que λ soit valeur propre de V, il faut que λ^2 soit valeur propre de U, de plus si X est vecteur propre de U pour λ^2, alors le vecteur $\begin{pmatrix} X \\ \lambda X \end{pmatrix}$ est vecteur propre pour V. Réciproquement soit μ une valeur propre de U pour le vecteur propre de X. Si λ est une racine carrée de μ, on pose $x = \begin{pmatrix} X \\ \lambda X \end{pmatrix}$. On a alors

$$Vx = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ U & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ \lambda X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda X \\ \lambda^2 X \end{pmatrix} = \lambda x.$$

On a en fait prouvé que l'application

$$\left\{\begin{array}{ccc} E_\delta(V) & \to & E_{\delta^2}(U) \\ \begin{pmatrix} X \\ \delta X \end{pmatrix} & \mapsto & X \end{array}\right.$$

est un isomorphisme.

2. → Chaque vecteur propre de U pour une valeur propre λ non nulle (on note δ tel que $\delta^2 = \lambda$) donne un vecteur propre pour V pour la valeur propre δ, à savoir $\begin{pmatrix} X \\ \delta X \end{pmatrix}$ et un pour la valeur propre $-\delta$, $\begin{pmatrix} X \\ -\delta X \end{pmatrix}$. Supposons que U soit diagonalisable et inversible (0 n'est pas

valeur propre de U). Considérons une base de vecteurs propres de U, $(X_1,\dots,X_n)$ associée aux valeurs propres $\lambda_1,\dots,\lambda^2$. On note δ_i une racine de λ_i. On va montrer que la famille

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ \delta_1 X_1\end{pmatrix},\cdots\begin{pmatrix} X_n \\ \delta_n X_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix} X_1 \\ -\delta_1 X_1\end{pmatrix},\cdots\begin{pmatrix} X_n \\ -\delta_n X_n\end{pmatrix},$$

est une base de $M_{2n}(\mathbb{C})$. Considérons une combinaison linéaire de ces vecteurs, avec des coefficients $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n$. La relation donne

$$\left\{\begin{array}{ccccc} a_1X_1+\ldots+a_nX_n & + & b_1X_1+\ldots+b_nX_n & = & 0 \\ a_1\delta_1X_1+\ldots+a_n\delta_nX_n & - & (b_1\delta_1X_1+\ldots+b_n\delta_nX_n) & = & 0. \end{array}\right.$$

La première équation donne $(a_1+b_1)X_1+\ldots+(a_n+b_n)X_n=0$ et la seconde $\delta_1(a_1-b_1)X_1+\ldots+\delta_n(a_n-b_n)X_n=0$. L'indépendance linéaire de la famille de vecteurs propres, et le fait que $\delta_i\neq 0$ donnent les équations $a_i+b_i=0=a_i-b_i$ pour tout $i\in[\![1;n]\!]$. On en déduit que toutes les constantes sont nulles. On a donc obtenu une base de vecteurs propres et V est diagonalisable.

→ Si U est diagonalisable et non inversible. L'étude précédente nous indique qu'il n'y a pas d'autres sous-espaces propres que ceux trouvés en première question. Chaque espace propre de U donne deux espaces propres pour V de même dimension, sauf pour la valeur propre 0 où on obtient un seul sous-espace. La somme des dimensions est alors $2n-\dim E_0(U)<2n$ et V n'est pas diagonalisable.

Exercice 15.17

1. Si x est non nul, on le complète en une base de $\mathbb{C}^n$. La matrice de u dans cette base est diagonale donc x est vecteur propre de u. Un exercice déjà fait montrer alors que u est une homothétie.
2. Soit $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et A la matrice de u dans cette base. Si P est inversible alors $P^{-1}AP=A$ donc $AP=PA$ pour toute matrice P inversible. Par densité de $GL_n(\mathbb{C})$ et continuité de $M\mapsto AM$ et $M\mapsto MA$, on a, pour toute matrice $B\in M_n(\mathbb{C})$, $AB=BA$. La matrice A commute avec toutes les matrices donc A est scalaire (voir autre exercice).

Exercice 15.18

On a $(P_1+\mathrm{i}P_2)A=B(P_1+\mathrm{i}P_2)$, ce qui donne en séparant les coefficients réels et imaginaires purs $P_1A=BP_1$ ainsi que $P_2A=BP_2$. On en déduit que $(P_1+\lambda P_2)A=B(P_1+\lambda P_2)$ pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$. Il reste à trouver λ de sorte que la matrice $P_\lambda=P_1+\lambda P_2$ est inversible. Considérons $f:\lambda\mapsto\det(P_1+\lambda P_2)$. Cette fonction est polynomiale de degrté au plus n, et n'est pas identiquement nulle puisque $f(\mathrm{i})\neq 0$. Elle admet un nombre fini de racines si bien qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $f(\lambda)\neq 0$. Pour cette valeur, on a $P_\lambda\in GL_n(\mathbb{R})$ et $A=P_\lambda^{-1}.B.P_\lambda$.

Exercice 15.19

Soit F la somme directe de tous les sous-espaces propres de u. On doit montrer que $F=E$. Supposons que cela n'est pas le cas. Ce sous-espace est stable par u, il admet donc un supplémentaire G stable par u de dimension au moins 1. L'endomorphisme induit u_G admet alors une valeur propre (G est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel) et un vecteur propre associé x. Ainsi u admet un vecteur propre en dehors de F, ce qui est une contradiction avec la définition de F.

Exercice 15.20

→ $\operatorname{rg} A=n$: la matrice A est inversible est $AB=BA=\det(A)I_n$. Si $AX=\lambda X$ avec $X\neq 0$, alors $\lambda\neq 0$ (A est inversible donc 0 n'est pas valeur prorpe). On a alors $BAX=\lambda BX$, ce qui donne $BX=\dfrac{\det A}{\lambda}X$, si bien que X est vecteur propre de B.

→ $\operatorname{rg} A\leqslant n-2$: la matrice B est nulle, donc tous les vecteurs non nuls sont propres pour B.

→ $\operatorname{rg} A=n-1$. On a montré que $\operatorname{rg} B=1$. Si X est un vecteur propre de A associé à une valeur propre λ non nulle. On a $AX=\lambda X$ et $BAX=0=\lambda BX$. Puisque $\lambda\neq 0$, on en déduit que $BX=0$ et X est un vecteur propre pour B (pour la valeur propre nulle). Il reste le cas de la valeur propre nulle pour A. Puisque $\operatorname{rg} A=n-1$, on a $\dim\ker A=1$. On considère $X\neq 0$ tel que $AX=0$. On a $ABX=0$, ce qui signifie que $BX\in\ker A$. Puisque $\dim\ker A=1$ et $X\in\ker A$ non nul tout vecteur de $\ker A$ est colinéaire à X, notamment BX est colinéaire à X, ce qui signifie que X est vecteur propre de B.

Exercice 15.21

1. On montre par récurrence que $f^k\circ g-g\circ f^k=kf^k$. Considérons l'endomorphisme de $\mathscr{L}(E)$: $h\mapsto h\circ g-g\circ h$. Pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a $\varphi(f^k)=kf^k$. Si f^k n'est jamais nul alors k est valeur propre de φ pour tout entier ce qui est impossible (infinité de valeurs propres). Il existe donc k tel que $f^k=0$.
2. C'est un peu compliqué... Supposons que x est un vecteur propre commun à f et g : $f(x)=\lambda x$ et $g(x)=\mu x$. On a alors $f(g(x))=\lambda\mu x$ et $g(f(x))=\lambda\mu x$. Cela donne $(f\circ g-g\circ f)(x)=0=f(x)$. Donc x est un vecteur propre pour f pour la valeur propre 0. On va justifier que g admet un vecteur propre dans $\ker f$. Soit $F=\ker f$: F est de dimension non nulle car f est nilpotente donc non inversible et F est stable par f. On montre que F est stable par g : si $f(x)=0$, alors $f(x)=0=(f\circ g-g\circ f)(x)=f(g(x))-g(f(x))=f(g(x))$ donc $g(x)\in\ker f$. On peut donc considérer les endomorphismes induits par f et g sur F. Alors $\tilde{g}$ est un endomorphisme de F de dimension au moins 1 donc $\tilde{g}$ admet au moins une valeur propre complexe et un vecteur propre x dans F. Ce vecteur est automatiquement vecteur propre pour f.
3. On va se ramener au cas précédent. On pose $\tilde{f}=f+kg$, donc $f=\tilde{f}-kg$. On a (on retire les $\circ$)

$$\tilde{f}g-g\tilde{f}=(fg-gf)=\alpha f+\beta g=\alpha\tilde{f}+(\beta-k\alpha)g$$

On suppose pour commencer que $\alpha \neq 0$ et on choisit $k = \dfrac{\beta}{\alpha}$. On a alors $\tilde{f}g - g\tilde{f} = \alpha\tilde{f}$. On note $\tilde{g} = \frac{1}{\alpha}g$, ce qui nous ramène à l'équation $\tilde{f}\tilde{g} - \tilde{g}\tilde{f} = \tilde{f}$. Alors il existe un vecteur propre commun aux deux endomorphismes : $\tilde{f}(x) = ax$ et $\tilde{g}(x) = bx$. En revenant à f et g, on obtient assez facilement que x est un vecteur commun à f et g.
Lorsque $\alpha = 0$, l'équation de départ est alors $fg - gf = \beta g$. Si $\beta = 0$, alors f et g commutent et ont un vecteur propre commun (voir un autre exercice classique). Sinon, on pose $\tilde{f} = -\dfrac{1}{\beta}f$ pour se ramener à $g\tilde{f} - \tilde{f}g = g$ et ainsi au problème précédent (en permutant le rôle de f et g).

Exercice 15.22

Notons f et g les endomorphismes canoniquement associés à A et B. Les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autres. Puisque χ_A est scindé à racines simples, A et f sont diagonalisables et chaque espace propre est de dimension 1. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres (2 à 2 distinctes) de f et $e_1, \dots, e_n$ une base de vecteurs propres associée. L'espace propre $E_i = \mathrm{Vect}(e_i)$ est stable par g, ce qui signifie que $g(e_i)$ est colinéaire à e_i. La base est aussi une base de vecteurs propres pour g : les deux endomorphismes sont simultanément diagonalisables. En revenant aux matrices, il existe une matrice inversible Q telle que $A = QDQ^{-1}$ et $B = Q\Delta Q^{-1}$ où D est diagonale de diagonale $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et Δ diagonale de diagonale $\mu_1, \dots, \mu_n$. Dire que $B = P(A)$ revient à dire que $\Delta = P(D)$, ce qui se ramène aux conditions $\mu_i = P(\lambda_i)$ pour tout $i \in [\![1; n]\!]$. Puisque les valeurs λ_i sont deux à deux distinctes, les polynômes d'interpolation de Lagrange permettent d'obtenir une solution - avec unicité sur P si on lui impose un degré inférieur ou égal à $n-1$.

Exercice 15.23

On a $f + g = \left(\mathrm{Id} + gf^{-1}\right).f$. On note $h = gf^{-1}$. L'endomorphisme $f + g$ est inversible si et seulement si $\mathrm{Id} + h$ l'est, c'est-à-dire si et seulement si -1 n'est pas valeur propre de h. L'endomorphisme h est de rang 1. l'espace propre associé à la valeur propre 0 est donc de dimension $n-1$. Si on prend une base du noyau de h et qu'on la complète en une base $\mathscr{B}$, alors la matrice de h dans cette base commence par $n-1$ colonne de 0 et se termine par une dernière colonne. On note α le coefficient en position (n, n) :

$$M_{\mathscr{B}}(h) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & x \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & x \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

On a alors $\alpha = \mathrm{tr}(h)$ et -1 n'est pas valeur propre pour h si et seulement si $\mathrm{th}\, h \neq -1$.
Remarque : à partir de cette réduction, on peut écrire la matrice de $\mathrm{Id} + h$ dans la même base et obtenir que $\det(\mathrm{Id} + h) = 1^{n-1}(1 + \mathrm{tr}\, h)$ ce qui redonne le résultat.

Exercice 15.24

La matrice est trigonalisable. Puisque son rang est 2, l'espace propre associé à la valeur propre 2 est de dimension $n-2$ et A est semblable à une matrice triangulaire supérieure de diagonale $\alpha, \beta, 0, \dots, 0$. On a alors

$$\chi_A = X^{n-2}(X-\alpha)(X-\beta) = X^{n-2}(X^2 - (a+b)X + ab).$$

De plus $\mathrm{tr}\, A = \alpha + \beta + (n-2).0$ et $\mathrm{tr}\, A^2 = \alpha^2 + \beta^2 + (n-2).0^2$. On en déduit que $(\mathrm{tr}\, A)^2 - \mathrm{tr}(A^2) = 2\alpha\beta$. Finalement, $\chi_A = X^{n-2}\left(X^2 - (\mathrm{tr}\, A)X + \dfrac{(\mathrm{tr}\, A)^2 - \mathrm{tr}(A^2)}{2}\right)$.

Exercice 15.25

On note a et b les endomorphismes canoniquement associés à A et B. On a donc la relation $a \circ b = 0$ et ainsi $\mathrm{Im}\, b \subset \ker a$. L'idée est la même qu'habituellement : on va déterminer un vecteur propre commun à a et b afin de commencer la trigonalisation, puis on achève par récurrence sur la dimension des matrices (avec des matrices de passage par blocs).

- → si B est nulle alors a admet un vecteur propre x et ce vecteur est automatiquement propre pour b (puisque $b(x) = 0 = 0.x$).
- → SI B est non nulle. Soit $F = \mathrm{Im}\, b$. Cet espace est stable par b et est de dimension au moins 1. On peut donc considérer l'endomorphisme $\tilde{b}$ induit par b sur F. Il admet un polynôme caractéristique de degré au moins 1, admet une valeur propre complexe et ainsi un vecteur $x \neq 0$ dans F tel que $b(x) = \lambda x$. Ce vecteur est dans $F = \mathrm{Im}\, b \subset \ker a$ donc $a(x) = 0$.

Dans toutes les situations, on a donc déterminé un vecteur propre commun à a et b. Il existe donc Q inversible telle que

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \alpha & L \\ (0) & \tilde{A} \end{pmatrix} \text{ ou } A = Q\begin{pmatrix} \alpha & L \\ (0) & \tilde{A} \end{pmatrix}Q^{-1}$$

et

$$Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} \beta & L' \\ (0) & \tilde{B} \end{pmatrix} \text{ ou } B = Q\begin{pmatrix} \beta & L' \\ (0) & \tilde{B} \end{pmatrix}Q^{-1}$$

La relation $AB = Q\begin{pmatrix} \alpha\beta & M \\ (0) & \tilde{A}\tilde{B} \end{pmatrix}Q^{-1}0$ donne alors $\tilde{A}\tilde{B} = 0$. On peut donc poursuivre la démonstration par récurrence. Si la propriété est vraie en dimension $n-1$, alors il existe $R \in GL_{n-1}(\mathbb{C})$ telle que $R^{-1}\tilde{A}R$ et $R^{-1}\tilde{A}R$ sont triangulaires supérieures. En considérant $P = Q.\begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & R \end{pmatrix}$, alors

$P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ sont triangulaires supérieures :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & R^{-1} \end{pmatrix} Q^{-1}AQ \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & R^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & L \\ (0) & \tilde{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & N \\ (0) & R^{-1}\tilde{A}R \end{pmatrix}.$$

Exercice 15.26

La matrice est sous la forme $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. On détermine le polynôme caractéristique (on développe par rapport à la dernière colonne) :

$$\begin{vmatrix} X-1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & X-1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ -1 & \cdots & \cdots & -1 & X-1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+2} \begin{vmatrix} -1 & X-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & -1 & X-1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & X-1 \\ -1 & \cdots & \cdots & \cdots & -1 \end{vmatrix} + (X-1)^n$$

   En soustrayant à chaque colonne la colonne suivante dans ce nouveau déterminant, on obtient

$$\begin{vmatrix} -1 & X-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & -1 & X-1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & X-1 \\ -1 & \cdots & \cdots & \cdots & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -X & X-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -X & X-1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -X & X-1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} = -(-X)^{n-2} = (-1)^{n-1}X^{n-2}$$

   Finalement $P_n = \chi_{A_n} = (X-1)^n - X^{n-2}$
2.
3. On vérifie que λ_n tend vers $+\infty$: si on fixe $A > 1$, $P_n(A) = (A-1)^n - A^{n-2} \underset{n\to+\infty}{\sim} -A^{n-2}$ et $P_n(A)$ tend vers $-\infty$. À partir d'un certain rang tous les λ_n sont supérieurs à A. On a alors

$$(\lambda_n - 1)^n = \lambda_n^{n-2} \Leftrightarrow n\ln(\lambda_n - 1) = (n-2)\ln(\lambda_n) \Leftrightarrow -2\ln\lambda_n = n\ln\left(1 - \frac{1}{\lambda_n}\right)$$

   ce qui donne $2\ln\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{\lambda_n}$ ou encore $2\lambda_n\ln\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$. Les limites étant infinies, les logarithmes sont équivalents. Or $\ln(2\lambda_n\ln\lambda_n) = \ln 2 + \ln\lambda_n + \ln(\ln\lambda_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\lambda_n$ donc $\ln\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$ et en remplaçant dans $2\lambda_n\ln\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$, on obtient $\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2\ln n}$.

Exercice 15.27

On a $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. En outre, le rang de $A - \lambda_i I_n$ est au moins $n-1$ car les lignes 1 à $n-1$ sont « échelonnées ». Donc chaque espace propre est de dimension 1 et A est diagonalisable si et seulement si les λ_i sont deux à deux distincts.

Exercice 15.28

1. Cela revient à dire que, pour tout $X \neq 0$, il existe λ_X tel que $AX = \lambda_X X$. On note $E_1, \dots, E_n$ la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{C})$ et $AE_i = \lambda_i E_i$ On note $X = E_1 + \dots + E_n$ et μ tel que $AX = \mu X$. En développant et en utilisant l'unicité de l'écriture dans une base, on en déduit que tous les λ_i sont égaux à μ et ainsi $A = \mu I_n$ (les deux coïncident sur une base).
2. On montre que A stabilise tout sous-espace de dimension $k-1$ ce qui permet de conclure par récurrence. Prenons H un sous-espace de dimension $k-1$ de $E = M_{n,1}(\mathbb{C})$. Le sous-espace H est de codimension au moins 2 donc on peut trouver deux vecteurs non nuls et non colinéaires X, Y tels que $X \notin H, Y \notin H$. Alors A stabilise $H \oplus \mathbb{K}X$ et $H \oplus \mathbb{K}X$ donc stabilise l'intersection, c'est-à-dire H. Si donc $k \in \{1, \dots, n-1\}$ on obtient que A est une matrice d'homothétie en appliquant le lemme. Sinon $k = n$ et on obtient directement que $A = \lambda I_n$.
3. On va démontrer que les matrices qui conviennent sont les matrices d'homothétie non nulles. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ une matrice qui commute avec tous les éléments de sa classe de conjugaison. On sait que A possède une valeur propre (non nulle) λ et il existe $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que

$$AX = \lambda X$$

   Observons que si $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, alors PX est vecteur propre pour λ de PAP^{-1}. Plus précisément, en notant $E_\lambda(A)$ l'espace propre de A

associé à la valeur propre λ, on a :

$$E_\lambda\left(PAP^{-1}\right) = PE_\lambda(A)$$

Comme A et PAP^{-1} commutent, on en déduit que A stabilise $PE_\lambda(A)$. Ceci est vrai pour tout $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Si $k = \dim E_\lambda(A)$, alors on vient de démontrer que A stabilise tout sous-espace de dimension k de $\mathbb{C}^n$. En effet, ceci découle du fait que lorsque P parcourt $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $PE_\lambda(A)$ parcourt tous les sous-espaces de dimension k de $\mathbb{C}^n$. On conclut alors avec le résultat précédent.