CHAPITRE 13 - SÉRIES NUMÉRIQUES

Exercice 13.4

1. On a, en fonction de la valeur de k,
$$\frac{\cos(2k\pi/3)}{k} = \begin{cases} \frac{1}{3p} & \text{si } k=3p \\ -\frac{1}{2}\frac{1}{3p+1} & \text{si } k=3p+1 \\ -\frac{1}{2}\frac{1}{3p+2} & \text{si } k=3p+2 \end{cases}$$
d'où le résultat avec $a=1$, $b=c=-\frac{1}{2}$. On a ainsi
$$\begin{aligned} T_{3n} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3k}-\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3k+1}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3k+2}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3k}-\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3k+1}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3k+2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3k}\right)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3k} \\ &= \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3k}-\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{3n}\frac{1}{p} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{3n}\frac{1}{p} \end{aligned}$$

2. On utilise le développement asymptotique $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+\mathrm{o}(1)$. Cela donne
$$T_{3n}=\frac{1}{2}\big(\ln n+\gamma-\ln(3n)-\gamma+\mathrm{o}(1)\big)=-\frac{\ln 3}{2}+\mathrm{o}(1).$$
Puisque $T_{3n+1}=T_{3n}-\frac{1}{2(3n+1)}$ et $T_{3n+2}=T_{3n+1}-\frac{1}{2(3n+2)}$, les trois suites extraites convergent vers $-\frac{\ln 3}{2}$. Finalement la série est convergente, de somme $-\frac{\ln 3}{2}$.

Exercice 13.6

1. La fonction $x\mapsto \frac{1}{x}\ln x$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1,+\infty[$ et $f'(x)=-\frac{\ln x}{x^2}+\frac{1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$. La fonction est donc décoissante sur $[3,+\infty[$. On en déduit que $\sum\int_{n-1}^{n}f(t)\,dt-f(n)$ converge. On en déduit que $\sum_{k=4}^{n}\left(\int_{k-1}^{k}f(t)\,dt-f(k)\right)$ admet une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$. Puisque $\int_3^n\frac{\ln t}{t}\,dt=\frac{1}{2}\ln^2 n-\frac{1}{2}\ln^2 3$, on en déduit que la suite (c_n) converge (on bouge un peu les constantes restantes). On aurait évidemment également pu étudier la série $\sum(c_{n+1}-c_n)$ et trouver un équivalent simple du terme général pour prouver la convergence.
2. On sépare les termes d'indices pairs et impairs de la somme alternée, puis on ajoute/soustrait les termes d'indices pairs :
$$\begin{aligned} S_{2n}=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\frac{\ln k}{k} &= -\sum_{p=1}^{n}\frac{\ln(2p-1)}{(2p-1)}+\sum_{p=1}^{n}\frac{\ln(2p)}{2p} \\ &= -\sum_{p=1}^{2n}\frac{\ln p}{p}+2\sum_{p=1}^{n}\frac{\ln(2p)}{2p} \\ &= -\sum_{p=1}^{2n}\frac{\ln p}{p}+\sum_{p=1}^{n}\frac{\ln 2+\ln p}{p} \\ &= \sum_{p=1}^{n}\frac{\ln p}{p}+\ln 2\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}-\sum_{p=1}^{2n}\frac{\ln p}{p} \end{aligned}$$
3. On note θ la limite de c_n, ce qui permet d'obtenir $\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{k}=\frac{\ln^2 n}{2}+\theta+\mathrm{o}(1)$ et on utilise le développement usuel $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+\mathrm{o}(1)$. On reporte dans S_{2n}. Cela donne
$$\begin{aligned} S_{2n} &= (\ln 2)(\ln n+\gamma)+(\frac{1}{2}\ln^2 n+\theta)-(\frac{1}{2}\ln^2(2n)+\theta)+\mathrm{o}(1) \\ &= \gamma\ln 2+(\ln 2)\ln n+\frac{1}{2}\left(\ln^2 n-(\ln 2+\ln n)^2\right)+\mathrm{o}(1) \\ &= \gamma\ln 2+(\ln 2)\ln n+\frac{1}{2}\left(-\ln^2 2-2\ln 2\ln n\right)+\mathrm{o}(1) \\ &= \gamma\ln 2-\frac{\ln^2 2}{2}+\mathrm{o}(1) \end{aligned}$$

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \gamma \ln 2 - \frac{\ln^2 2}{2}$. Puisque $S_{2n+1} = S_{2n} - \frac{\ln(2n+1)}{2n+1}$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \gamma \ln 2 - \frac{\ln^2 2}{2}$. Finalement la série est convergente et $\sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k} = \gamma \ln 2 - \frac{\ln^2 2}{2}$.

Exercice 13.7

→ Un simple encadrement suffit : on a
$$\frac{1}{n^\alpha}((n-1)\ln^2 2) \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^\alpha}(n \ln^2 n).$$
Le terme de gauche est équivalent à $\frac{\ln^2 2}{n^{\alpha-1}}$, si bien que $\sum u_n$ diverge lorsque $\alpha - 1 \leqslant 1$, c'est-à-dire $\alpha \leqslant 2$. La série de Bertrand $\sum \frac{\ln^2 n}{n^{\alpha-1}}$ converge si et seulement si $\alpha > 2$ et $\sum u_n$ converge si $\alpha > 2$. Finalement $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 2$.

→ un encadrement ne suffit plus (cela donne une partie des résultats seulement). On doit être plus précis sur l'encadrement de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$. Une comparaison série-intégrale (voir cours) donne $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_1^n \frac{dt}{\sqrt{t}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$. On a finalement $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^{\alpha-1/2}}$ et $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > \frac{3}{2}$.

Exercice 13.8

1. On a immédiatement $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit $0 \leqslant u_n = \frac{1}{n} e^{-u_{n-1}} \leqslant \frac{1}{n}$. Finalement $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Puisque $u_n = \frac{1}{n} e^{-u_{n-1}}$, on en déduit alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. La série $\sum u_n$ diverge.
2. On aimerait montrer que (u_n) est décroissante mais cela ne fonctionne pas. On effectue un développement asymptotique de u_n. On a effectivement, en utilisant le fait que $u_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$,
$$u_n = \frac{1}{n}(1 - u_{n-1} + \mathrm{o}(u_{n-1})) = \frac{1}{n} - \frac{u_{n-1}}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
Tout cela permet d'écrire
$$w_n = (-1)^n u_n = \frac{(-1)^n}{n} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge (théorème des séries alternées), le terme restant est le terme d'une série absolument convergente (si on note $v_n = w_n - \frac{(-1)^n}{n}$, on a $|v_n| = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{n^2}\right)$). On en déduit finalement que $\sum (-1)^n u_n$ converge.

Exercice 13.9

1. L'intervalle $]0,1[$ est stable par $x \mapsto x - x^2$. On en déduit l'existence de la suite et le fait que $u_n \in]0,1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a ensuite $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 < 0$. La suite est décroissante, minorée par 0 et converge vers une limite $\ell \in [0, u_0]$ qui vérifie $\ell = \ell - \ell^2$. Ainsi (u_n) est strictement décroissante vers 0.
2. Puisque $u_n^2 = u_n - u_{n+1}$, la série $\sum u_n^2$ est de même nature que la suite (u_n) (série téléscopique $\sum u_n - u_{n+1}$). Elle est donc convergente. On a $\ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ln u_{n+1} - \ln u_n$. La suite $(\ln u_n)$ diverge vers $-\infty$, donc la série téléscopique associée aussi. Enfin, $\ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ln(1-u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -u_n$ puisque u_n tend vers 0. Par équivalence (termes négatifs), on en déduit que $\sum u_n$ diverge.
3. On effectue le développement asymptotique
$$u_{n+1}^\beta - u_n^\beta = u_n^\beta\left((1-u_n)^\beta - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n^\beta(-\beta u_n) = -\beta u_n^{\beta+1}$$
La situation pour avoir une limite finie non nulle est de prendre $\beta = -1$.
4. Le théorème de sommation des équivalents (terme 1 de signe constant et série $\sum 1$ divergente) permet d'obtenir $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$. Par conséquent $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et $u_n^\alpha \sim \frac{1}{n^\alpha}$. La série $\sum u_n^\alpha$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice 13.10

On note $w_n = \ln(\sqrt{n}\,u_n)$. On étudie la série de terme général $w_{n+1} - w_n$:

$$\begin{aligned}
w_{n+1} - w_n &= \frac{1}{2}\ln\frac{n+1}{n} + \ln\left((1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right) + \left(\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{2(n+1)}\right) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{2n(n+1)} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)
\end{aligned}$$

On en déduit que $\sum(w_{n+1} - w_n)$ converge et que w_n admet une limite finie ℓ. Par conséquent, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}u_n = e^\ell > 0$ et $u_n \sim \dfrac{e^\ell}{\sqrt{n}}$. La série $\sum u_n$ est divergente.

Exercice 13.11

On redémontre le développement asymptotique du cours :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \mathrm{O}(\frac{1}{n}),$$

ce qui donne

$$u_n = (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}} + \gamma\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \mathrm{O}(\frac{1}{n^{3/2}}$$

Le terme est somme de trois termes, chacun étant celui d'une série convergente (et même absolument convergente pour le dernier)

Exercice 13.12

Évidemment, on ne prend pas le logarithme… on passe sous forme exponentielle. Puisque $\mathrm{Re}(1+\frac{i}{k^2}) > 0$,

$$1 + \frac{i}{k^2} = \sqrt{1+\frac{1}{k^4}}\exp(i\arctan\frac{1}{k^2})$$

et

$$u_n = \left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^4}\right)\right)^{1/2} \exp\left(i\sum_{k=1}^{n}\arctan\frac{1}{k^2}\right)$$

Soit $v_n = \prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{1}{k^4}\right)$. On a $\ln v_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\dfrac{1}{k^4}\right)$ et $\ln v_n$ converge vers un réel strictement positif α. De même $\sum\arctan\dfrac{1}{k^2}$ converge puisque $\arctan\dfrac{1}{k^2} \sim \dfrac{1}{k^2}$. Si on note $\theta = \sum\limits_{k=1}^{+\infty}\arctan\dfrac{1}{k^2}$, la suite (u_n) converge vers $\exp(\frac{\alpha}{2} + i\theta)$.

Exercice 13.13

→ La suite est à termes strictement positifs et croissante. Si elle converge vers une limite finie ℓ, on aurait $\ell = \ell + \dfrac{1}{\ell}$ ce qui est impossible. La suite diverge vers $+\infty$.

→ On remarque que $x_{n+1}^2 = x_n^2 + 2 + \dfrac{1}{x_n^2}$. Ainsi $x_{n+1}^2 - x_n^2$ tend vers 2 en $+\infty$. Puisque c'est le terme général d'une série divergente positive, on en déduit que

$$\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}^2 - x_k^2) = x_n^2 - x_0^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n.$$

On a ainsi $x_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n$ et, par positivité des termes, $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2n}$.

Exercice 13.14

1. On effectue un changement de variable :
$$a_n = \int_0^{\pi} f(u+n\pi)\sin(u+n\pi)\,du = (-1)^n \int_0^{\pi} f(u+n\pi)\sin(u)\,du$$
On a donc une série alternée. On note $b_n = \int_0^{\pi} f(u+n\pi)\sin(u)\,du$. D'une part $0 \leqslant b_n \leqslant \pi f(n\pi)$ donc b_n tend vers 0 et d'autre part
$$b_{n+1} - b_n = \int_0^{\pi} \big(f(u+(n+1)\pi) - f(u+u\pi)\big)\sin u\,du \leqslant 0.$$
La série vérifie le théorème des séries alternées donc est convergente.
2. Soit $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n\pi \leqslant x < (n+1)\pi$, soit $n_x = E(x/\pi)$. On a
$$\int_0^x f(t)\sin(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n_x-1} a_k + \int_{n_x\pi}^x f(t)\sin(t)\,dt.$$
Or $\left|\int_{n_x\pi}^x f(t)\sin(t)\,dt\right| \leqslant \pi f(n_x\pi)$, de limite nulle lorsque x tend vers $+\infty$ (car n_x tend aussi vers $+\infty$). Puisque $\sum a_n$ converge, on en déduit l'existence de la limite de $\int_0^x f(t)\sin(t)\,dt$ lorsque x tend vers $+\infty$.
3. C'est le même principe. On note cette fois
$$a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(t)\sin(t)|\,dt = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)|\sin(t)|\,dt.$$
Puisque $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(t)|\,dt = \int_0^{\pi} |\sin(t)|\,dt = 2$, on obtient l'encadrement
$$2f((n+1)\pi) \leqslant a_n \leqslant 2f(n\pi).$$
Comme précédemment, par encadrement, on justifie que $\int_0^{+\infty} f(t)|\sin t|\,dt$ converge (ce qui revient à l'intégrabilité recherchée) si et seulement si $\sum a_n$ converge. L'encadrement qu'on vient d'obtenir permet de montrer que $\sum a_n$ converge si et seulement si $\sum f(n\pi)$ converge. Puisque f est continue, décroissante et positive, le théorème de comparaison série-intégrale indique que c'est le cas si et seulement si l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge (en effectuant un changement de variable linéaire pour la multiplication par π), c'est-à-dire si et seulement si f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 13.15

→ Soit $f(t) = \dfrac{t}{1+t^6\sin^2 t}$ pour $t \in \mathbb{R}^+$. La fonction est continue et positive sur $\mathbb{R}^+$ donc $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ est croissante et sa limite lorsque x tend vers $+\infty$ et la même que celle de la suite $F(n\pi)$. Puisque $F(n\pi) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \dfrac{t}{1+t^6\sin^2 t}\,dt$, on peut s'intéresser à la convergence de la série de terme général positif $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \dfrac{t}{1+t^6\sin^2 t}\,dt$.

→ On encadre alors u_n :
$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{n}{1+(n+1)^6\sin^2 t}\,dt \leqslant u_n \leqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{n+1}{1+n^6\sin^2 t}\,dt.$$
On a donc amené à calculer (par périodicité) $\int_0^{\pi} \dfrac{1}{1+n^6\sin^2 t}\,dt$. Un changement de variable du type « $u = \tan t$ », donne $\int_0^{\pi} \dfrac{1}{1+n^6\sin^2 t}\,dt = \dfrac{\pi}{\sqrt{1+n^6}}$. On a ainsi un encadrement de u_n et finalement $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n\pi}{\sqrt{1+n^6}} = \dfrac{\pi}{n^2}$ (une majoration aurait suffit). On a donc convergence de $\sum u_n$ et f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 13.16

1. On étudie plutôt la suite de termes $w_n = \ln(v_n)$ et même la série $\sum(w_{n+1} - w_n)$. On a
$$w_{n+1} - w_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha} + \ln\frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha\ln(1+\frac{1}{n}) + \ln\frac{u_{n+1}}{u_n}.$$
On effectue alors un développement limité
$$w_{n+1} - w_n = \alpha\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \mathrm{O}(\frac{1}{n^2})\right) + \left(-\frac{\alpha}{n} + \mathrm{O}(\frac{1}{n^2}) - \frac{\alpha^2}{2n^2} + \mathrm{O}(\frac{1}{n^3})\right) = \mathrm{O}(\frac{1}{n^2}).$$

Ainsi $\sum(w_{n+1}-w_n)$ converge, la suite (w_n) converge vers une limite finie ℓ et $v_n=\exp(w_n)$ converge vers $C=\exp(\ell)>0$. On a par conséquent $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C}{n^\alpha}$ et $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha>1$.

2. Puisque a et n ne sont pas entiers, u_n existe et ne s'annule pas.À partir d'un certain rang n_0, $n+a$ et $n+b$ sont positifs. On peut alors écrire $u_n=u_{n_0}.v_n$ où v_n est positif - cela permet de se ramener à la question précédente. On a $u_{n+1}=u_n\frac{n+a}{n+b}$. On effectue un développement limité du quotient
$$\frac{1+a/n}{1+b/n}=1-\frac{b-a}{n}+\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
La série $\sum u_n$ converge si et seulement si $b-a>1$.
3. Exactement comme la question précédente. On a convergence de $\sum u_n$ si et seulement si $a>1$ (mais bon, c'est plus difficile si on n'a pas la première question posée).

Exercice 13.17

1. On commence par montrer par récurrence que tous les termes sont strictement positifs. On en déduit alors que $u_{n+1}-u_n>0$. La suite est donc strictement croissante. Soit elle converge vers ℓ finie et strictement positive puisque $\ell\geqslant u_1>0$, soit vers $+\infty$. Supposons que $u_n\to\ell>0$. On a alors $u_{n+1}-u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ell}\frac{1}{n^\alpha}$. Puisque la suite (u_n) converge, la série $\sum u_{n+1}-u_n$ converge. Par théorème de comparaison, on doit avoir $\frac{1}{n^\alpha}$ convergente. On a donc $\alpha>1$. Réciproquement si $\alpha>1$, on a $0\leqslant u_{n+1}-u_n\leqslant\frac{1}{u_1n^\alpha}$. La série $\sum u_{n+1}-u_n$ converge et (u_n) converge.
2. On a $\ell-u_n=\sum_{k=n}^{+\infty}(u_{k+1}-u_k)=\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha u_k}$. On a $\frac{1}{k^\alpha u_k}\underset{k\to+\infty}{\sim}\frac{1}{\ell}\frac{1}{k^\alpha}$, terme général positif d'une série convergente, donc $\ell-u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{\ell}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}$. On a montré que $\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$. Ainsi $\ell-u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{\ell(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.
3. On a $\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty$. De plus $u_{n+1}+u_n=2u_n+\frac{1}{u_nn^\alpha}\underset{n\to+\infty}{\sim}2u_n$. On en déduit
$$u_{n+1}^2-u_n^2\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2u_n}{n^\alpha u_n}=\frac{2}{n^\alpha}.$$
Par sommation des équivalents,
$$u_n^2\underset{n\to+\infty}{\sim}u_n^2-u_1^2\underset{n\to+\infty}{\sim}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2}{n^\alpha}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2}{1-\alpha}n^{1-\alpha}.$$

Exercice 13.18

1. La suite (s_n) est croissante, par conséquent
$$\sum_{k=1}^{p}\frac{a_{n+k}}{S_{n+k}}\geqslant\sum_{k=1}^{p}\frac{a_{n+k}}{S_{n+p}}=\frac{S_{n+p}-S_n}{S_{n+p}}=1-\frac{S_n}{S_{n+p}}.$$
2. Supposons que la série $\sum\frac{a_k}{S_k}$ converge. On obtient, lorque p tend vers $+\infty$,
$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a_{n+k}}{S_{n+k}}=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{a_k}{S_k}\geqslant1$$
car $\lim_{p\to+\infty}S_{n+p}=+\infty$. Or le reste de $\sum\frac{a_k}{S_k}$ doit tendre vers 0. Cela donne une contradiction.
3. On simplifie
$$\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}=\frac{S_n-S_{n-1}}{S_nS_{n-1}}=\frac{a_n}{S_nS_{n-1}}\geqslant\frac{a_n}{S_nS_n}=\frac{a_n}{S_n^2}\geqslant0$$
puisque $S_n\geqslant S_{n-1}$. La suite $(\frac{1}{S_n})$ converge vers 0 donc la série de terme général $\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}$ converge. On en déduit, par comparaison pour les séries à termes positifs, que $\sum\frac{a_n}{S_n^2}$ converge.
4. On peut étudier facilement certaines valeurs : puisque $\lim_{n\to+\infty}S_n=+\infty$, on a $S_n\geqslant1$ à partir d'un certain rang n_0. Si $\alpha\geqslant2$, alors pour $n\geqslant n_0$, $\frac{a_n}{S_n^\alpha}\leqslant\frac{a_n}{S_n^2}$ et $\sum\frac{a_n}{S_n^\alpha}$ converge. Si $\alpha\leqslant1$, alors pour $n\geqslant n_0$, $\frac{a_n}{S_n^\alpha}\geqslant\frac{a_n}{S_n}$ et $\sum\frac{a_n}{S_n^\alpha}$ diverge. De façon générale, on s'inspire d'une formule proche d'une comparaison série-intégrale. On choisit $\alpha>1$ (on peut le faire aussi lorsque $\alpha<1$ en modifiant les bornes de l'intégrale et le sens des inégalités). Puisque la suite (S_n) est strictement croissante vers $+\infty$, on a
$$\int_{S_{n-1}}^{S_n}\frac{dt}{t^\alpha}\geqslant\int_{S_{n-1}}^{S_n}\frac{dt}{S_n^\alpha}=\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n^\alpha}=\frac{a_n}{S_n^\alpha}$$

Or $\int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t^\alpha} = \left[\frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}}\right]_{S_{n-1}}^{S_n} = \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}} - \frac{1}{S_n^{\alpha-1}}\right)$. Tout cela donne la majoration

$$0 \leqslant \frac{a_n}{S_n^\alpha} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}} - \frac{1}{S_n^{\alpha-1}}\right).$$

On en déduit la convergence de $\sum \frac{a_n}{S_n^\alpha}$ (la série téléscopique majorante est convergente car la suite associée converge vers 0).

Exercice 13.19

On note $v_n = u_n + \frac{1}{2} u_{2n}$. On essaie d'exprimer u_n en fonction de v_n : on ne peut pas le faire en descendant (en divisant n par 2 plusieurs fois car n n'est pas une puissance de 2. On part dans l'autre sens :

$$\begin{array}{rcl} v_n &=& u_n + \frac{1}{2} u_{2n} \\ v_{2n} &=& u_{2n} + \frac{1}{2} u_{2^2 n} \\ v_{2^2 n} &=& u_{2^2 n} + \frac{1}{2} u_{2^3 n} \\ & \vdots & \\ v_{2^p n} &=& u_{2^p n} + \frac{1}{2} u_{2^{p+1} n} \end{array}$$

En effectuant une bonne combinaison de ces équations, on fait disparaître les termes intermédiaires :

$$v_n - \frac{1}{2} v_{2^1 n} + \frac{1}{2^2} v_{2^2 n} + \ldots + (-1)^p \frac{1}{2^p} v_{2^p n} = u_n + (-1)^p \frac{1}{2^{p+1}} u_{2^{p+1} n}.$$

Puisque la suite v_n converge, elle est bornée et la série de terme général $\frac{(-1)^p}{2^p} v_{2^p n}$ converge. Puisque la suite u est bornée, on peut passer à la limite lorsque p tend vers $+\infty$. Cela donne

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^p} v_{2^p n} = u_n.$$

On note ℓ la limite de la suite v. Ainsi $w_n = v_n - \ell$ tend vers 0. On peut alors écrire

$$u_n = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^p} w_{2^p n} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^p} \ell = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^p} w_{2^p n} + \frac{1}{1+1/2}\ell$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $|w_n| \leqslant \varepsilon$ et alors

$$\left|\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^p} w_{2^p n}\right| \leqslant \varepsilon \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^p} = 2\varepsilon.$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^p} w_{2^p n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{3}\ell$.

Exercice 13.20

Pour tout $n \geqslant 1$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k}$. On exprime a_n en fonction des termes de cette suite : pour $n \geqslant 2$, on a $S_n - S_{n-1} = \frac{a_n}{n}$. La relation reste vraie pour $n = 1$ si on pose $S_0 = 0$. Cela donne donc

$$\forall n \geqslant 1, a_n = n(S_n - S_{n-1})$$

On peut alors écrire le terme demandé :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} kS_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} kS_{k-1} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} kS_k - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)S_k = S_n - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k.$$

Puisque la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge - on note ℓ sa limite - on a, par la moyenne de Cesàro, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k = \ell$. On en déduit que la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)_{n\geqslant1}$ converge vers 0

Exercice 13.21

1. On utilise une comparaison série intégrale. Soit $h > 0$. La fonction $f_h : x \mapsto f(xh)$ est décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (changement de variable linéaire). On en déduit directement que $\sum f_h(n)$ converge avec $f_h(n) = f(nh)$.
2. On reprend les encadrements. On a, pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$hf((k+1)h) \leqslant \int_{kh}^{(k+1)h} f(t)\,dt \leqslant hf(kh),$$
ce qui donne en sommant sur $\mathbb{N}$ (la fonction est intégrable et les séries convergent :
$$h\sum_{n=1}^{+\infty} f(nh) \leqslant \int_0^{+\infty} f(t)\,dt \leqslant h\sum_{n=0}^{+\infty} f(nh)$$
ou encore
$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt \leqslant h\sum_{n=0}^{+\infty} f(nh) \leqslant \int_0^{+\infty} f(t)\,dt + hf(0).$$
Lorsque h tend vers 0, on obtient $\lim\limits_{h\to 0} h\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f(nh) = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$.
3. C'est beaucoup moins simple dans cette situation. Soit $\varepsilon > 0$. On va découper l'intégrale en deux parties : la contribution essentielle sur un segment $[0, a]$ et une partie « petite » sur $[a, +\infty[$ de sorte que $\int_{a-1}^{+\infty} \phi \leqslant \varepsilon$: on peut choisir un tel a puisque la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de $\int_x^{+\infty} \phi(t)\,dt = 0$ est nulle (on écrit $\int_x^{+\infty} = \int_0^{+\infty} - \int_0^x$). On choisit a suffisament grand de sorte que ϕ soit décroissante sur $[a-1, +\infty[$ (c'est-à-dire $a \geqslant t_0 + 1$). On note, pour $h \in]0, 1]$ (cela simplifie les majorations),
$$\delta_h = h\sum_{n=0}^{+\infty} \phi(nh) - \int_0^{+\infty} \phi(t)\,dt.$$
On a, en notant $n_h = [\frac{a}{h}]$,
$$\delta_h = h\sum_{n=0}^{n_h} \phi(nh) + \sum_{n=n_h+1}^{+\infty} h\phi(nh) - \int_0^{+\infty} \phi(t)\,dt.$$
L'entier n_h vérifie $a - h \leqslant hn_h \leqslant a$. On découpe l'intégrale en deux pour approcher la somme finie (cela ressemble à une somme de Riemann).
$$\delta_h = \sum_{n=0}^{n_h} \left(h\phi(nh) - \int_{nh}^{(n+1)h} \phi(t)\,dt\right) + \sum_{n=n_h+1}^{+\infty} h\phi(nh) - \int_{(n_h+1)h}^{+\infty} \phi(t)\,dt.$$
On majore les différents morceaux : on a d'une part
$$0 \leqslant \sum_{n=n_h+1}^{+\infty} h\phi(nh) \leqslant \int_{hn_h}^{+\infty} \phi(t)\,dt \leqslant \int_{a-h}^{+\infty} \phi(t)\,dt \leqslant \int_{a-1}^{+\infty} \phi(t)\,dt \leqslant \varepsilon,$$
ce qui donne
$$\left|\sum_{n=n_h+1}^{+\infty} h\phi(nh) - \int_{(n_h+1)h}^{+\infty} \phi(t)\,dt\right| \leqslant 2\varepsilon.$$
Pour la somme, on utilise la continuité uniforme : la plus grande valeur prise est $(n_h+1)h \leqslant a + h \leqslant a + 1$. La fonction ϕ est continue sur $[0, a+1]$ donc y est uniformément continue. Il existe $\alpha > 0$ tel que $|x - y| \leqslant \alpha$ donne $|\phi(x) - \phi(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{a+1}$. Pour $h < \alpha$ et $n \in [\![0; n_h]\!]$, on a alors
$$\begin{aligned}\left|h\phi(nh) - \int_{nh}^{(n+1)h} \phi(t)\,dt\right| &= \left|\int_{nh}^{(n+1)h} (\phi(nh) - \phi(t))\,dt\right| \\ &\leqslant \int_{nh}^{(n+1)h} \left|\phi(nh) - \phi(t))\right|\,dt \leqslant h\frac{\varepsilon}{a+1},\end{aligned}$$
ce qui permet de majorer la somme par $(n_h+1)h\varepsilon \leqslant \dfrac{a+h}{a+1}\varepsilon \leqslant \varepsilon$. Finalement, pour $0 < h < \alpha$, on a $|\delta_h| \leqslant 3\varepsilon$. Ouf!

Exercice 13.23

On vérifie simplement que la suite est à termes strictement positifs, ce qui permet de prendre le logarithme et d'obtenir
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ln u_{k+1} = \frac{1}{2}\ln u_k + \ln\frac{k+1}{2k}$$
Afin d'obtenir une série télescopique, on multiplie par 2^{k+1} cette relation, cela donne, en posant $v_k = 2^k \ln u_k$,
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, v_{k+1} - v_k = 2^{k+1}\ln\frac{k+1}{2k}$$

En sommant de 1 à $n-1$, on obtient $v_n - v_1 = \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k+1} \ln \frac{k+1}{2k}$. On note $\alpha_k = 2^{k+1} \ln \frac{k+1}{2k}$. On a $\alpha_k \underset{k\to+\infty}{\sim} -2^{k+1} \ln 2$. La série $\sum \alpha_k$ est divergente à termes négatifs. On en déduit que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n-1} -2^{k+1} \ln 2 = -\ln 2 \sum_{k=2}^{n} 2^k = -\ln 2 \left(2^{n+1} - 1 - 3\right)$$

Finalement $v_n = 2^n \ln u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -2^{n+1} \ln 2$, ce qui donne $\lim_{n\to+\infty} \ln u_n = -2\ln 2$ et finalement $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{4}$.

Exercice 13.25

D'après l'hypothèse, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_n \leqslant \frac{u_n^2}{u_{n+1}}$$

La série de terme général u_n est donc convergente et, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)^2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{\sqrt{u_{n+1}}} \times \sqrt{u_{n+1}}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n^2}{u_{n+1}}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}\right).$$

On a donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n^2}{u_{n+1}} \geqslant \frac{(1+S)^2}{S} \quad \text{avec } S = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

La fonction $x \mapsto \frac{(1+x)^2}{x}$ admet sur $]0,+\infty[$ un minimum égal à 4 . On a donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n^2}{u_{n+1}} \geqslant 4$$