CHAPITRE 11 - ALGÈBRE LINÉAIRE

Exercice 11.1

1. Soit $0 = e_1 + e_2 + \ldots + e_n$ une décomposition dans la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$. C'est aussi une décomposition de 0 dans la somme directe $\bigoplus_{i=1}^{n} F_i$. Ainsi, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $e_i = 0$.
2. On choisit $j \in [\![1\,;n]\!]$. par hypothèse $E_j \subset F_j$. On prouve l'inclusion contraire. Soit $x \in F_j$. Puisque $x \in E$, il se décompose en $x = x_1 + \ldots + x_n$ avec $x_i \in E_i$. Or cette décomposition est également une décomposition de x dans la somme directe $\bigoplus_{i=1}^{n} F_i$. Dans cette somme directe x se décompose également en $x = 0 + \ldots + 0 + x + 0 + \ldots + 0$ (où x est en position j, dans F_j). Par unicité de la décomposition, on a $x_i = 0$ si $i \neq j$ et $x_j = x$. Par construction $x_j \in E_j$.

Exercice 11.2

Soit $x \in G$. On a $x \in F + G$ donc $x \in F + H$. On peut le décomposer en $x = f + h$ avec $f \in F$ et $h \in H$, donc $h \in G$. Ainsi $f = x - h$ est aussi dans G. Cela donne $f \in F \cap G \subset F \cap H$. On obtient alors $f \in H$. Finalement $x = f + h \in H$.

Exercice 11.3

→ Puisque $C \subset B$, on a $A + C \subset B + C$.
→ On prouve l'inclusion inverse. Soit $x \in A + B$. Il existe $a \in A$ et $b \in B$ tel que $x = a + b$. Puisque $b \in B = (A \cap B) \oplus C$, il se décompose en $b = \alpha + c$ où $\alpha \in A \cap B$, d'où $\alpha \in A$. Ainsi $x = a + \alpha + c \in A + C$. On a l'inclusion inverse. Finalement $A + C = A + B$.
→ On prouve que la somme est directe. On sait que $(A \cap B) \cap C = \{0\} = A \cap B \cap C$. Or $C \subset B$, donc $B \cap C = C$. Ainsi $A \cap B \cap C = A \cap C = \{0\}$.

Finalement $A \oplus C = A + B$.

Exercice 11.4

1. On considère une relation $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = 0$. On suppose qu'elle n'est pas triviale, et note k l'indice maximal tel que $\lambda_i \neq 0$ (on a $\lambda_k \neq 0$ et $\lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_n = 0$). On va montrer une contradiction. On utilise le comportement en $+\infty$. La dernière fonction est celle qui domine toutes les autres. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$\lambda_1 e^{\alpha_1 x} + \lambda_2 e^{\alpha_2 x} + \ldots + \lambda_k e^{\alpha_k x} = 0,$$
et, en divisant par $e^{\alpha_k x}$ on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\lambda_1 e^{(\alpha_1 - \alpha_k)x} + \lambda_2 e^{(\alpha_2 - \alpha_k)x} + \ldots + \lambda_{k-1} e^{(\alpha_{k-1} - \alpha_k)x} + \lambda_k = 0.$$
Lorsque x tend vers $+\infty$, il reste $\lambda_k = 0$ (puisque $\alpha_i - \alpha_k < 0$ si $i < k$). Cela contredit la maximalité de k. Il n'y a donc pas de scalaire non nul dans la somme. La famille est libre.
2. On peut le démontrer par récurrence sur le nombre d'éléments de la famille. On note $\mathscr{P}(n)$ la proposition « pour toute famille de réels $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$, les fonctions f_{α_i} sont linéairement indépendantes ». La proposition est vérifiée pour au rang 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(n)$. On considère une famille de fonctions f_{α_i} à $n+1$ éléments (ordonnés comme au dessus). On considère une combinaison linéaire $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f_{\alpha_i} = 0$. On dérive cette relation deux fois, ce qui donne la nouvelle relation $-\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \alpha_i^2 f_{\alpha_i} = 0$. On ajoute à cette relation la première relation multipliée par α_{n+1}^2. Il reste
$$\sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i (\alpha_{n+1}^n - \alpha_i^2)\right) f_i = 0.$$
L'hypothèse au rang n donne, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $\lambda_i(\alpha_{n+1}^n - \alpha_i^2) = 0$, et, puisque $\alpha_{n+1}^n - \alpha_i^2 \neq 0$, $\lambda_i = 0$. On repart de la première relation dans laquelle reste $\lambda_{n+1} f_{\alpha_{n+1}} = 0$. Le dernier scalaire est également nul. La propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vérifiée. Par récurrence le résultat est démontré.
3. On part d'une relation $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{a_i} = 0$. On regarde au voisinage d'un point a_i. En ce point la somme est nulle donc dérivable. Si le coefficient λ_i est non nul, la somme n'est pas dérivable en a_i d'où une contradiction (les autres termes sont localement $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de a_i - on retire les valeurs absolues).

Exercice 11.5

Soit $u \in F \cap G$. D'une part, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $u = \lambda(1, -1, 1, 1) + \mu(0, 1, 2, 3)$, c'est-à-dire
$$u = (\lambda, -\lambda + \mu, \lambda + 2\mu, \lambda + 3\mu),$$
et d'autre part ce vecteur est dans F, soit
$$(\lambda) + (-\lambda + \mu) + (\lambda + 2\mu) + (\lambda + 3\mu) = 0 = 2\lambda + 6\mu.$$

Ainsi, $u = \lambda(1,-1,1,1)+\mu(0,1,2,3) \in G$ est également dans F si, et seulement si, $\lambda = -3\mu$. On en déduit que

$$\begin{aligned} F\cap G &= \{-3\mu(1,-1,1,1)+\mu(0,1,2,3), \mu \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\mu(-3,4,-1,0), \mu\in\mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((-3,4,-1,0)). \end{aligned}$$

Pour déterminer $F+G$, on sait que $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F\cap G) = 3+2-1 = 4$ (F est un hyperplan, donc est de dimension 3, et la famille donnée pour définir G est bien entendu génératrice, mais également libre). Ainsi $F+G = \mathbb{R}^4$.

Exercice 11.6

1. Le polynôme nul est dedans, et la statiblité par combinaisons linéaires se fait facilement
2. P est dans H si et seulement si il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X-1)^2 Q$ et $\deg P \leqslant n$. Cela est équivalent à $P = (X-1)^2 Q$ avec $Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$. On a comme bases possibles $((X-1)^2 X^k)_{k\in[\![0;n-2]\!]}$ ou $((X-1)^k)_{k\in[\![2;n]\!]}$ (en fait $(X-1)^2$ fois n'importe quelle base de $\mathbb{R}_{n-2}[X]$). Ces bases comportent toutes $n-1$ éléments donc $\dim H = n-1$.

Exercice 11.7

Dans le cours

Exercice 11.8

On vérifie que $r\circ r = 0$ (calcul direct). On constate que, pour $x \in E$, $r(x) = p(x)+q(x)-q\circ p(x) = p(x)+q(x-p(x)) \in \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q$. Cela donne $\mathrm{Im}\, r \subset \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q$. Pour montrer la réciproque, on choisit $z = p(x)+q(y) \in \mathrm{Im}\, p+\mathrm{Im}\, q$ et on vérifie que z est invariant par r (c'est plus simple). Pour le noyau, on a directement $\ker p \cap \ker q \subset \ker r$. Réciproquement, si $p(x)+q(x)-q\circ p(x) = 0$, en appliquant p, il reste $p(x) = 0$. En réinjectant, on a $q(x) = 0$ d'où l'inclusion réciproque.

Exercice 11.9

- → *sens direct :* puisque $E = \ker f \oplus \mathrm{Im}\, f = \ker g \oplus \mathrm{Im}\, g$, il suffit de vérifier que f et $f\circ g$ coïncident sur deux espaces supplémentaires. Pour $x \in \ker f = \ker g$, on a $f(x) = 0 = f\circ g(x)$. Pour $x \in \mathrm{Im}\, g$, on a $g(x) = x$ et $f\circ g(x) = f(x)$. Ainsi f et $f\circ g$ coïncident sur $\ker g$ et sur $\mathrm{Im}\, g$ donc sur E. De même pour l'autre égalité.
- → *sens réciproque :* on a $f = f\circ g$ donc $f\circ f = (f\circ g)\circ f = f\circ(g\circ f) = f\circ g = f$ et f est un projecteur (idem pour g). Si $x \in \ker f$ alors $g(x) = (g\circ f)(x) = 0$ donc $x \in \ker g$ c'est-à-dire $\ker f \subset \ker g$. De même pour l'inclusion réciproque.

Exercice 11.10

1. On a rapidement $p\circ q = q\circ p = 0$. De plus $p+q = \frac{1}{b-a}(u - aId_E - u + bId_E) = Id_E$. Ainsi $p\circ p = p\circ(Id_E - q) = p - 0 = p$ (et de même pour q). Les endomorphismes p et q sont donc des projecteurs (on peut également calculer $p\circ p$ directement en écrivant, pour le second $u - aId_E = u - bId_E + (b-a)Id_E$).
2. On a $u^0 = Id_E = p+q$. De plus $(b-a)p = u - aId_E$ et $(a-b)q = u - bId_E$. Par combinaison linéaire (pour éliminer Id_E), on obtient $(b-a)bp - (a-b)aq = (b-a)u$, soit $u = aq+bp$. Puisque p et q commutent avec $p\circ q = 0$, la formule du binome donne alors
$$u^n = a^n q^n + b^n p^n = a^n q + b^n p.$$
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On regarde si, par le plus grand des hasards, formule n'est pas valable pour $-n$. On effectue le produit u^n par le candidat à l'inverse
$$u^n.\left(a^{-n}q + b^{-n}p\right) = \left(a^n q + b^n p\right)\left(a^{-n}q + b^{-n}p\right) = q^2 + 0 + p^2 = q+p = Id_E.$$
Ainsi l'inverse de u^n est bien $a^{-n}q + b^{-n}p$. La formule est donc valable pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
4. On commence par remarquer que, pour tout $x \in E$, $p(x) \in \ker(u - bId_E)$ et $q(x) \in \ker(u - aId_E)$. De plus $x = p(x)+q(x)$. De plus si $x \in \ker(u-bId_E)\cap\ker(u-aId_E)$, alors $u(x) = ax = bx$. Puisque $b \neq a$, alors $x = 0$. On a montré $E = E_a \oplus E_b$.

Exercice 11.11

Le théorème du rang nous donne que $\dim F + \dim G = \dim E$ lorsque F existe. C'est donc une condition nécessaire. Supposons que $\dim F + \dim G = \dim E$. On va construire f sur une base de E. Soit $(e_1,\dots,e_p)$ une base de F, complétée par $(e_{p+1},\dots,e_n)$ pour donner une base de E. Puisque $\dim G = n-p$, on peut considérer $f_{p+1},\dots,f_n$ des vecteurs formant une base de G. Considérons l'application linéaire f qui envoie $e_1,\dots,e_p$ sur 0 et $f(e_i) = f_i$ lorsque $i = p+1,\dots,n$. L'image de f est engendrée par l'image d'une base de E, et l'image de la base $e_1,\dots,e_n$ est $f_{p+1},\dots,f_n$. Ainsi $\mathrm{Im}\, f = G$. Si on note $H = \mathrm{Vect}(e_{p+1},\dots,e_n)$, la restriction de f de H vers G est un automorphisme. Ainsi $rg f \geqslant n-p$. Puisque $\dim\ker f \geqslant p$ avec $F \subset \ker f$, on a finalement $\ker f$ de dimension p, égal à F.

Exercice 11.12

- → Tout d'abord $h = g\circ f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. On a $h\circ h = g\circ f\circ g\circ f = g\circ(f\circ g)\circ f = h$, donc h est un projecteur.
- → On détermine $\ker h$. Si $g(f(x)) = 0$, en composant par f, on a $f(x) = 0$ donc $x \in \ker f$, ce qui donne $\ker h \subset \ker f$. La réciproque est

immédiate. On a $\ker h = \ker f$.

→ Pour l'image, on a directement $\text{Im } h \subset \text{Im } g$. Réciproquement, si $y = g(x)$ avec $x \in \mathbb{R}^p$, alors $y = (g \circ f)(g(x)) \in \text{Im } g \circ f$. Ainsi $\text{Im } h = \text{Im } g$.

→ On a $f \circ g = \text{Id}_{\mathbb{R}^p}$ si bien que g est injective. Le théorème du rang donne $\dim \mathbb{R}^p = \text{rg } g = p$. On a également f surjective, d'où $n = \text{rg } f + \dim \ker f$ donne $\dim \ker f = n - p$. Tout est cohérent puisqu'on retrouve $\text{rg } h + \dim \ker h = p + n - p = n$.

Exercice 11.13

1. Puisque $\text{rg } u = 1$, il existe $v \neq 0$, tel que $\text{Im } u = \text{Vect}(v)$. Pour tout $x \in E$, $u(x)$ est colinéaire à v et il existe un unqiue scalaire λ_x tel que $u(x) = \lambda_x.v$. On note $\varphi : x \mapsto \lambda_x$. Il reste à montrer que l'application φ de E dans $\mathbb{K}$ est linéaire. Soit $x, y\lambda \in E \times E \times \mathbb{K}$. On a
$$u(x+\lambda y) = \varphi(x+\lambda y)v = u(x) + \lambda u(y) = \big(\varphi(x) + \lambda\varphi(y)\big)\, v.$$
Puisque $v \neq 0$, on a $\varphi(x+\lambda y) = \varphi(x) + \lambda\varphi(y)$.
2. Pour $x \in E$, $u^2(x) = u(u(x)) = u(\varphi(x)v) = \varphi(x)u(v) = \varphi(x)\varphi(v)v = \varphi(v)u(x)$. On montre par récurrence que $u^n(x) = (\varphi(v))^{n-1}u(x)$ si $n \geqslant 1$, soit $u^n = (\varphi(v))^{n-1}u$.

Exercice 11.14

Considérons φ la restriction de f à $\ker(g \circ f)$:
$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \ker(g\circ f) & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$$
C'est possible puisque $\ker(g \circ f)$ est un sous-espace vectoriel de E. On étudie image et noyau :
$$x \in \ker\varphi \Leftrightarrow x \in \ker(g\circ f) \text{ et } f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ et } (g\circ f)(x) = 0,$$
puisque la première condition entraîne la seconde, on a $\ker\varphi = \ker f$. Soit y dans l'image de φ : il existe $x \in \ker(g \circ f)$ tel que $y = f(x)$. On a notamment $g(y) = (g\circ f)(x) = 0$, d'où $y \in \ker g$. Ainsi $\text{Im }\varphi \subset \ker g$, et $\dim \text{Im }\varphi \leqslant \dim\ker g$. On écrit le théorème du rang pour φ :
$$\dim\ker(g\circ f) = \dim\ker\varphi + \dim\text{Im }\varphi \leqslant \dim\ker f + \dim\ker g.$$

Exercice 11.15

Si $\text{Im } u = \text{Vect}(x)$ et $\text{Im } v = \text{Vect}(y)$ alors $\text{Im }(u+v) \subset \text{Vect}(x,y)$. Cela donne $\text{rg }(u+v) \leqslant 2$. Toutes les situations peuvent arriver. Le cas $v = -u$ donne un rang nul, le cas $u = v$ un rang égal à 1 et le rang 2 peut s'obtenir avec des projecteurs bien choisis (par exemple).

Exercice 11.16

1. On a rapidement $\text{Im }(u+v) \subset \text{Im } u + \text{Im } v$, d'où $\text{rg }(u+v) \leqslant \dim(\text{Im } u + \text{Im } v) \leqslant \text{rg } u + \text{rg } v$. En appliquant avec $u+v$ et $-v$, on obtient $\text{rg } u \leqslant \text{rg }(u+v) + \text{rg }(-v)$. Or $\text{Im } v = \text{Im }(-v)$, ce qui donne $\text{rg }(u+v) \geqslant \text{rg } u - \text{rg } v$. De même $\text{rg }(u+v) \geqslant \text{rg } v - \text{rg } u$, d'où $|\text{rg } u - \text{rg } v| \leqslant \text{rg }(u+v)$.
2. Si on a $u \circ v = 0$, alors $\text{Im } v \subset \ker u$, donc $\text{rg } u \leqslant \dim\ker v = \dim E - \text{rg } v$. On a donc $\text{rg } u + \text{rg } v \leqslant \dim E$. De plus $\dim E = \text{rg }(u+v) \leqslant \text{rg } u + \text{rg } v$. Finalement $\text{rg } u + \text{rg } v = \dim E$.

Exercice 11.17

1. non vide et stable par combinaison linéaire.
2. deux méthodes :
   → On montre facilement que la somme est directe. Par analyse synthèse : si $f \in E$, alors
   $$f = \left(\int_0^1 f(t)\,dt\right).1_{\mathbb{R}} + \left(f - \left(\int_0^1 f(t)\,dt\right).1_{\mathbb{R}}\right)$$
   est l'unique décomposition de f dans $F \oplus G$.
   → l'application $f \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)$ est une forme linéaire non nulle sur E. On a $F = \ker f$ et $f(1_{\mathbb{R}}) = 1 \neq 0$ donc $1_{\mathbb{R}} \notin F$ et $\text{Vect}(1_{\mathbb{R}})$ est un supplémentaire de F.

Exercice 11.18

On montre facilement que F est l'ensemble des multiples du polynôme $X(X-1)(X-2)$ de degré inférieur ou égal à 3, donc l'ensemble $\{\lambda X(X-1)(X-2), \lambda \in \mathbb{R}\}$. De même $G = \{\lambda(X-1)(X-2)(X-3), \lambda \in \mathbb{R}\}$. H est l'ensemble des polynômes pairs. La relation $P(X) = P(-X)$ donne P sous la forme $P = a + bX^2$. Finalement F et G sont de dimension 1, et H de dimension 2.

1. La somme $F+G$ est directe : si un polynôme est dans l'intersection, il admet 4 racines en étant de degré au plus 3. Ce polynôme est donc nul. On note $K = \{P \in E, P(1) = P(2) = 0\}$. Il est immédiat que F et G sont des sous-espaces de K, ce qui donne $F \oplus G \subset K$. Pour l'inclusion réciproque, on peut le faire par dimension : $K = \{(aX+b)(X-1)(X-2), (a,b) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((X-1)(X-2), X(X-1)(X-2)\}$, ce qui donne $\dim K = 2$. Puisque $\dim(F \oplus G = \dim F + \dim G = 2$, on obtient l'égalité. On peut aussi considérer un polynôme de K, $P =$

$(aX+b)(X-1)(X-2)$ est le décomposer en

$$P = \lambda X(X-1)(X-2) + \mu(X-1)(X-2)(X-3) = (X-1)(X-2)((\lambda+\mu)X - 3\mu),$$

qui est réalisé pour $\mu = -b/3$ et $\lambda = a + b/3$.

2. On montre que la somme est directe : un élément de l'intersection s'annule en 1, en 2, et, par parité, en -1 et -2. Il admet 4 racines et est nul. Par des considérations de dimension, on obtient bien $\dim F \oplus G \oplus H = 4 = \dim E$, ce qui donne l'égalité des espaces.

Exercice 11.19

On calcule $f(X^k)$ (l'application est bien entendu linéaire). On a $f(1) = f(X) = 0$, $f(X^2) = 2$ et $f(X^k) = k(k-1)X^{k-2} + \cdots$ si $k \geqslant 2$. On voit déjà que $\mathbb{R}_1[X] \subset \ker f$ et $\dim \ker f \geqslant 2$. On a également $\mathrm{Im}\, f$ qui contient $f(X^2), \ldots, f(X^n)$, ce qui donne une famille de polynômes de degré allant de 0 à $n-2$. On en déduit que $\mathbb{R}_{n-2}[X] \subset \mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{rg}\, f \geqslant n-1$. Par le théorème du rang, les dimensions ne peuvent pas être supérieures. En conclusion $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}_{n-2}[X]$ et $\ker f = \mathbb{R}_1[X]$.

Exercice 11.20

1. On s'intéresse à l'application linéaire $g = f_{|H} \in \mathscr{L}(H, F)$. On a $\mathrm{Im}\, g = f(H)$ et $\ker g = \{x \in H, f(x) = 0\} = \ker f \cap H$. On applique la formule du rang à g, ce qui donne
$$\dim H = \dim f(H) + \dim(\ker f \cap H).$$
On a obtenu la relation.
2. On applique la relation précédente avec $H = f^{-1}(K)$. Puisque $0 \in K$, on a $\ker f = f^{-1}(\{0\}) \subset f^{-1}(K)$, si bien que $\ker f \cap f^{-1}(K) = \ker f$. On a $y \in f(H)$ si et seulement s'il existe $x \in f^{-1}(K)$ tel que $y = f(x)$. Or $x \in f^{-1}(K)$ est équivalent à $f(x) = y \in K$. Ainsi $y \in f(H)$ si et seulement si $y \in \mathrm{Im}\, f$ et $y \in K$, soit $y \in K \cap \mathrm{Im}\, f$. On obtient la relation en remplaçant.

Exercice 11.21

Soit $e_1, \ldots, e_p$ une base de E. Soit $n_1, \ldots, n_p$ des entiers tels que $f^{n_i}(e_i) = 0$. On considère n le plus grand de ces entiers. On a $f^n(e_i) = 0$ pour tout $i \in [\![1\,;p]\!]$. L'endomorphisme f^n est nul sur une base donc partout.

Exercice 11.22

1. Soit $y \in F_{i-1}$, il existe $x \in E$ tel que $y = (f_1 \circ \ldots \circ f_{i-1})(x)$. Alors $f_i(y) = (f_1 \circ \ldots \circ f_{i-1})(f_i(x))$ avec les propriétés de commutativité. Puisque, pour tout $x \in E$, $f_i^n(x) = 0$, c'est entre autre vrai pour $x \in F_{i-1}$, et donc pour l'endomorphisme induit (le résultat est immédiat avec f_1 et F_0).
2. On applique le théorème du rang à g_i la restriction de f_i à F_{i-1} si $F_{i-1} \neq \{0\}$. On a $\mathrm{Im}\, g_i = f_i(F_{i-1}) = F_i$ et g n'est pas injective. On a donc $\dim F_i < \dim F_{i-1}$ tant que F_{i-1} n'est pas $\{0\}$. On montre alors que $\dim F_i \leqslant n - i$ et $\dim F_n = 0$. Cela donne bien que $f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_n = 0$.
3. application directe du résultat précédent.

Exercice 11.23

1. Tout vecteur x de E se décompose dans la base donnée. Ainsi $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f^k(a) = f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f^{n-1}(a)\right)$. L'application f est donc surjective. Puisque f est un endomorphisme en dimension finie, elle est bijective. L'image de la base $(f(a), f^2(a), \cdots, f^n(a))$ par f^{-1} est une base, à savoir $(a, f(a), f^2(a), \cdots, f^{n-1}(a))$.
2. $f^n(a)$ s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $(a, f(a), f^2(a), \cdots, f^{n-1}(a))$. Il existe des scalaires $a_0, \cdots, a_{n-1}$ tels que
$$f^n(a) + a_{n-1} f^{n-1}(a) + \cdots + a_1 f(a) + a_0 a = 0.$$
Considérons g l'endomorphisme $f^n + a_{n-1} f^{n-1} + \cdots + a_1 f + a_0 \mathrm{Id}$. Il est nul en a. De plus g commute avec f (il n'y a qu'à écrire), si bien que $g(f^k(a)) = f^k(g(a)) = 0$ pour tout entier k. L'endomorphisme g est nul sur une base de E. Il est donc nul.
3. Même principe. Soit g un endomorphisme qui commute avec f. On peut trouver des constantes $b_0, \cdots, b_{n-1}$ telles que $g(a) = b_{n-1} f^{n-1}(a) + \cdots + b_1 f(a) + a_0 a$. On considère alors $h = g - b_{n-1} f^{n-1} + \cdots + b_1 f + a_0 \mathrm{Id}$. Il commute avec f (car f et g commutent avec f). Il est nul en a, et comme dans la question précédente, on montre que $h(f^k(a)) = f^k(h(a)) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. L'endomrophisme h est donc nul sur une base de E et sur E.

Exercice 11.24

1. Puisqu'on est en dimension finie, on en profite (le résultat est aussi vrai en dimension infinie mais se fait différemment). On choisit une base $(e_1 ? \ldots, e_n)$ de E. Si x est non nul et que $(f(x), x)$ est liée alors il existe α et β pas tous nuls tels que $\alpha x + \beta f(x) = 0$. Le scalaire β est non nul sinon on aurait $\alpha x = 0$ d'où $x = 0$ ($\alpha \neq 0$ si $\beta = 0$). Ainsi, il existe λ tel que $f(x) = \lambda x$. On applique cela à e_i : il existe λ_i tel que $f(e_)) = \lambda_i e_i$, puis à $x = e_1 + \ldots + e_n$: il existe λ tel que $f(x) = \lambda x$, ce qui donne $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} e_i$. Finalement $\lambda_i = \lambda$ pour tout i. Puisque f

et $\lambda\mathrm{Id}$ coïncident sur une base, on a $f = \lambda\mathrm{Id}$.

2. Soit f dans le commutant de $\mathscr{L}(E)$. Soit x un vecteur non nul de E, D la droite vectoriel dirigée par x et H un supplémentaire. Soit p le projecteur sur D de direction H. Ona $f(p(x)) = p(f(x))$, soit $p(f(x)) = f(x)$. Or les seuls éléments invariants par p sont les vecteurs colinéaires à x, donc $f(x)$ est colinéaire à x. Finalement f est une homothétie.
3. On fait la même chose avec une symétrie par rapport à D parallèlement à H plutôt qu'un projecteur et on obtient le même résultat.

Exercice 11.25

1. On commence par remarquer que $\deg\Delta Q = \deg Q - 1$ pour tout polynôme Q (on écrit avec des coefficients ou on le fait matriciellement en écrivant la matrice de Δ dans la base canonique). Si $\deg P = n-1$ alors $\Delta^n P = 0$. Il suffit de montrer la propriété pour les entiers $k < n$. On détermine alors $\Delta^k P$ et on montre que c'est une combinaison linéaire des $P(X+i)$ pour $i \in [\![0;k]\!]$. Le plus simple pour cela est de considérer l'application $T : P \mapsto P(X+1)$. On a alors $\Delta = \mathrm{Id} - T$. Puisque Id commute avec T, on peut appliquer la formule du binôme :
$$\Delta^k = (\mathrm{Id}-T)^k = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^i T^i \text{ puis } \Delta^k P = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^i P(X+i).$$
2. On a l'inclusion $F \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Réciproquement, on a $P, \Delta P, \cdots, \Delta^{n-1}P$ tous dans F. Or $\Delta^k P$ est de degré $n-1-k$. La famille précédente forme donc une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Ainsi $\mathrm{Vect}(P, \cdots, \Delta^{n-1}P) = \mathbb{R}_{n-1}[X] \subset F$. Cela donne l'égalité. Puisque que la famille $(P(X), P(X+1), \ldots, P(X+n-1))$ comporte n vecteurs et qu'elle est génératrice, elle forme bien une base de l'espace.
3. On a montré que $\Delta^n = 0$. De plus
$$\Delta^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i T^i = \mathrm{Id} + \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i T^i$$
En notant $\alpha_k = (-1)^{k+1}\binom{n}{k}$, on a $\mathrm{Id} = \sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k T^k$ et, pour tout polynôme Q,
$$Q(X) = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k Q(X+k)$$
.

Exercice 11.26

1. on vérifie que $f_\sigma^2(e_i) = e_i$ pour tout vecteur e_i lorsque σ est une transposition. Ainsi $f^2 = \mathrm{Id}$ dans ce cas et f est une symétrie. Si $\tau = \tau_{ij}$ alors $f_\tau(e_k) = e_k$ si $k \neq i$ et j. On a également $f_\tau(e_i+e_j) = e_i+e_j$ et $f_\tau(e_i-e_j) = -(e_i-e_j)$. Les $n-1$ vecteurs $e_1, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_{j-1}, e_{j+1}, e_n, e_i+e_j$ sont invariants et le vecteur $e_i - e_j$ transformé en son opposé. Ces n vecteurs forment une base et f_τ est la symétrie par rapport à $H = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_{j-1}, e_{j+1}, e_n, e_i+e_j)$ de direction $\mathrm{Vect}(e_i - e_j)$.
2. si σ et σ' sont deux permutations alors $(f_\sigma \circ f_{\sigma'})(e_i) = f_\sigma(e_{\sigma'(i)}) = e_{(\sigma\circ\sigma')(e_i)}$. Ainsi $f_\sigma \circ f_{\sigma'} = f_{\sigma\sigma'}$. En utilisant le fait que $\sigma \mapsto \sigma\sigma'$ est une permutation de $\mathfrak{S}_n$, on vérifie que $p \circ f_\sigma = p$ (et de même $f_\sigma \circ p = p$). On a alors
$$p \circ p = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} f_\sigma \circ p = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} p = p.$$
Finalement p est un projecteur.
→ avec $p \circ f_\tau = p$, on obtient $p \circ f_\tau(e_1) = p(e_1)$. À l'aide des différentes transpositions, on montre que tous les vecteurs $p(e_i)$ sont égaux.
→ on vérifie que $p(e_1) = \frac{1}{n}(e_1 + \ldots + e_n)$ (parmi les $n!$ permutations, $(n-1)!$ envoient e_1 sur e_1, autant sur e_2… on note u le vecteur $\frac{1}{n}(e_1 + \ldots + e_n)$
→ Si $p(v) = v$ avec $f_\sigma \circ p(v) = p(v)$ soit $f_\sigma(v) = v$, on montre que toutes les coordonnées de v sont égales. On en déduit que $v = \lambda(e_1 + \ldots + e_n)$. Réciproquement avec les résultats précédents, on vérifie que $p(u) = u$.
→ on déduit de tout cela que $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Vect}\, u$.
→ Les vecteurs $e_i - e_1$ sont dans le noyau de p. Par dimension, $\ker p = \mathrm{Vect}(e_2 - e_1, \ldots, e_n - e_1)$.
Matriciellement c'est presque plus simple : on peut montrer que la matrice de p dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ est la matrice dont tous les coefficients sont $\frac{1}{n}$ (ce qui permet, avec le chapitre sur la réduction, de retrouver les résultats précédents).

Exercice 11.27

1. Si $f = g\circ p$, alors $\ker p \subset \ker f$, de plus $\mathrm{rg}\,(g\circ p) = \mathrm{rg}\, p$. On en déduit que $\ker f = \ker p$. Considérons p un projecteur de noyau $\ker f$, d'image H un supplémentaire de $\ker f$. Soit $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de H, complétée par $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ une base de $\ker p$. Quelle que soit g, on a déjà $f'e_i) = (g \circ p)(e_i)$ lorsque $i = r+1, \ldots, e_n$. On veut alors $f(e_i) = g(p(e_i)) = g(e_i)$ si $i \in [\![1;r]\!]$. La famille $f_1 = f(e_1), \ldots, f_r = f(e_r)$ est une base de $\mathrm{Im}\, f$ (isomorphisme classique), qu'on peut compléter en $f_{r+1}, \ldots, f_n$ pour obtenir une base de E. Notons g l'endomorphisme de E qui envoie e_i sur f_i. Il envoie une base de E sur une autre base de E et est par conséquent un automorphisme de E. Il vérifie alors les bonnes conditions puisque f et $g \circ p$ coïncident sur une base.
2. On a cette fois $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, p$ (une inclusion et égalité des rangs). De plus $f(x) = 0$ si, et seulement si $g(x) \in \ker p$. On doit donc envoyer $\ker f$ sur $\ker p$ par g - la difficulté est de construire g bijective. On décompose l'espace de deux manières : au départ $E = H \oplus \ker f$, et à

l'arrivée $E = \text{Im } f \oplus K$. On note $(e_1, \dots, e_r)$ une base de H et $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ une base de $\ker f$. Par isomorphisme du rang, on a $(f_1 = f(e_1), f_2 = f(e_2), \dots, f_r = f(e_r))$ qui est une base de $\text{Im } f$, qu'on complète à l'aide d'une base de K, $(f_{r+1}, \dots, f_n)$. On considère g l'automorphisme qui envoie la première base sur la seconde, et p le projecteur d'image $\text{Im } f$, de noyau K. Alors, si $i = 1, \dots, r$, on a $p(g(e_i)) = p(f_i) = f_i = f(e_i)$. Si $i = r+1, \dots, n$, alors $p(g(e_i)) = p(f_i) = 0$ car $f_i \in K = \ker p$. Pour ces entiers $f(e_i) = 0$. Les applications $p \circ g$ et f coïncident sur une base de E donc sur E.

Exercice 11.28

1. Soit H un supplémentaire de $\ker g$ dans E et $\tilde{g}$ l'isomorphisme canonique de H sur $\text{Im } g$:

$$\tilde{g} : \left\{ \begin{array}{ccc} H & \to & \text{Im } g \\ x & \mapsto & g(x) \end{array} \right.$$

   On cherche h tel que $f = g \circ h$. On ne peut pas directement utiliser $h = g^{-1} \circ f$ puisque g n'est pas bijective, mais on peut utiliser $\tilde{g}$ qui est une bijection entre H et $\text{Im } g$. Puisque, pour tout $x \in E$, $f(x) \in \text{Im } f \subset \text{Im } g$, on peut définir $h(x) = \tilde{g}^{-1}(f(x))$. Pour tout $x \in E$, on a $h(x) \in H$ et $g(h(x)) = \tilde{g}\left(\tilde{g}^{-1}(f(x))\right) = f(x)$. Cela donne bien $f = g \circ h$. De plus $\text{Im } h = \tilde{g}^{-1}(f(E)) = \tilde{g}^{-1}(\text{Im } f)$ et puisque $\tilde{g}$ est un isomorphisme linéaire, on a $\text{rg } h = \dim \text{Im } f = \text{rg } f$.

2. → on suppose (i) et (ii). On a $\text{rg } f = \text{rg}(f \circ g \circ f) \leqslant \text{rg}(g \circ f) \leqslant \text{rg } g$ et de même $\text{rg } g \leqslant \text{rg } f$. On a bien $\text{rg } f = \text{rg } g$.
   → on suppose (i) et (iii). On a $g \circ f \circ g \circ f = g \circ f$ et $f \circ g \circ f \circ g = f \circ f$, donc $f \circ g$ et $g \circ f$ sont des projecteurs. On a $\text{rg}(g \circ f \leqslant \text{rg } q = \text{rg } f$. De plus $\text{rg } g = \text{rg } f = \text{rg } f \circ g \circ f \leqslant \text{rg } g \circ f$ (de même pour $\text{rg } f \circ g$). On a ainsi $\text{rg } g \circ f = \text{rg } f \circ g = \text{rg } f = \text{rg } g$. Puisque $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im } g$, on a $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im } g$. Finalement $g \circ f$ est un projecteur d'image $\text{Im } g$. Les éléments de $\text{Im } g$ sont invariants donc, pour tout $x \in E$, $(g \circ f)(g(x)) = g(x)$, cest-à-dire $g \circ f \circ g = g$.
   → même principe avec (ii) et (iii).

3. On se donne f et on cherche g. Si g existe, on a montré que $f \circ g$ doit être un projecteur d'image $\text{Im } f$. On considère p un projecteur quelconque d'image $\text{Im } f$. On a $\text{Im } p \subset \text{Im } f$ (puisqu'il y a égalité), donc il existe, d'après la première question, une application g (elle correspond à h dans la première question) de même rang que p telle que $p = f \circ g$. Puisque p est un projecteur d'image $\text{Im } f$, pour tout $x \in E$, $p(f(x)) = f(x)$. Ainsi, pour tout $x \in E$, $f(x) = p(f(x))(f \circ g)(f(x))$, ce qui donne $f \circ g \circ f = f$, sachant qu'on a $\text{rg } g = \text{rg } p = \text{rg } f$.

Exercice 11.29

1. Supposons que l'union des sous-espaces donne E. En retirant certains sous-espaces, on choisit une famille minimale dont l'union donne E (c'est-à-dire la plus petite famille en terme de nombre d'éléments telle que la réunion donne l'espace). On note $E_1, \dots, E_k$ cette famille minimale. Quitte à supprimer les sous-espaces qui sont inclus dans l'un des autres, on peut supposer qu'il n'y a aucune inclusion entre les sous-espaces. Soit F l'union des $k-1$ premiers sous-espaces $E_1, \dots, E_{k-1}$ (cette union est différente de E). On choisit $y \in F \backslash E_k$ et $x \in E_k \backslash F$ (c'est possible par la construction précédente). On considère les vecteurs $u_\lambda = y + \lambda x$. Aucun de ces vecteurs n'est dans E_k car sinon y le serait aussi (car $x \in E_k$) - ils sont donc tous dans F (puisque E est la réunion de ces deux ensembles). Pour $\lambda \neq \mu$, les vecteurs u_λ et u_μ ne peuvent pas être dans le même sous espace E_i pour $i \in [\![1 ; k-1]\!]$: si c'était le cas, on aurait

$$(y + \lambda x) - (y + \mu x) = (\lambda - \mu)x \in E_i$$

   ce qui donne $x \in E_i$ puisque $\lambda \neq \mu$. Puisque $\mathbb{R}$ comporte plus que k réels, on obtient une contradiction.

2. On fait une récurrence sur la codimension commune des sous-espaces (l'entier $p = n - r$). C'est immédiat lorsque $p = 0$. Supposons la propriété vraie pour un certain entier p et considérons k sous-espaces de dimension $n - (p+1)$. La réunion de ces sous-espaces n'est pas tout l'espace E. Il existe donc un vecteur x qui n'est dans aucun de ces sous-espaces. Notons alors $G_i = F_i \oplus \text{Vect}(x)$. Ces k sous-espaces sont de même dimension $n - p$ et on peut appliquer la propriété de récurrence au rang précédent. Il existe ainsi un supplémentaire commun H pour ces différents sous-espaces : $Gi \oplus H = E$. On note alors $K = \text{Vect}(x) \oplus H$. Ce sous-espace vectoriel est un supplémentaire commun à tous les espaces F_i.

Exercice 11.30

1. Voir l'un des exercices précédents.

2. (a) Soit $H = F \cap G$. On note H_1 un supplémentaire de H dans F et H_2 un supplémentaire de H dans G. Les espaces H_1 et H_2 on même dimension puisque F et G sont de même dimension. On note $e_1, \dots, e_p$ une base du premier et $f_1, \dots, f_p$ une base du second. On note $K = \text{Vect}(e_1 + f_1, \dots, e_p + f_p)$. On vérifie qu'il est en somme directe avec F et avec G et que c'est un supplémentaire commun à F et G dans $F + G$. On note L un supplémentaire de $F + G$ dans E. Alors, $K \oplus L$ convient.
   (b) on considère l'ensemble des espaces qui sont en somme directe avec F et avec G. Cet ensemble est non vide. On en choisit un,H, de dimension maximale. Soit $F' = F \oplus H$ et $G' = G \oplus H$. Si ces espaces ne sont pas E, alors il existe un vecteur x en dehors de $F' \cup G'$. L'espace $H \oplus \text{Vect}(x)$ est en somme directe avec F et G. Cela contredit la maximalité. Ainsi $E = F \oplus h = G \oplus H$.

3. Supposons que $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$, la famille étant libre. On note $F_i = \text{Vect}(e_i)$. On a directement $d(F) = \sum_{i=1}^{k} d(F_i)$. Si G_1 et G_2 sont deux droites non colinéaires, alors elles admettent un supplémentaire commun H. On a $d(E) = d(G_1) + d(H) = d(G_2) + d(H)$. Ainsi $d(G_1) = d(G_2)$. Notons α cette quantité commune à toutes les droites. On a alors $d(F) = k.\alpha = \alpha \dim(F)$. Réciproquement une telle applications convient.

Exercice 11.31

→ Le sens réciproque est simple. S'il existe $h \in \mathrm{GL}(\mathrm{F})$ et $k \in \mathscr{L}(E)$ tels que $h \circ g = f \circ k$, on a $\mathrm{rg}(h \circ g) = \mathrm{rg}\, g$ car h est bijective et $\mathrm{rg}(f \circ k) \leqslant \mathrm{rg}\, f$.

→ On note $p = \mathrm{rg}\, f$ et $q = \mathrm{rg}\, g$ et on suppose que $q \leqslant p$.

- On considère $\left(e_{p+1}, \ldots, e_n\right)$ une base de $\ker f$ complétée en $(e_1, \ldots, e_n)$ base de E et $\left(\varepsilon_{q+1}, \ldots, \varepsilon_n\right)$ une base de $\ker g$ complétée en $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ base de E.
- La famille $\left(g(\varepsilon_1), \ldots, g\left(\varepsilon_q\right)\right)$ est alors une base de $\mathrm{Im}\, g$ que l'on peut compléter en $\left(g(\varepsilon_1), \ldots, g\left(\varepsilon_q\right), g_{q+1}, \ldots, g_m\right)$ base de F. De même, $\left(f(e_1), \ldots, f\left(e_p\right)\right)$ est une base de $\mathrm{Im}\, f$ que l'on peut compléter en $\left(f(e_1), \ldots, f\left(e_p\right), f_{p+1}, \ldots, f_m\right)$ base de F.
- Considérons k l'endomorphisme de E défini par $k(\varepsilon_1) = e_1, \ldots, k\left(\varepsilon_q\right) = e_q$. $k\left(\varepsilon_{q+1}\right) = \cdots = h(\varepsilon_n) = 0$ et l'automorphisme de F qui transforme la base $\left(g(\varepsilon_1), \ldots, g\left(\varepsilon_q\right), g_{q+1}, \ldots, g_m\right)$ en la base $\left(f(e_1), \ldots, f\left(e_p\right), f_{p+1}, \ldots, f_m\right)$. On vérifie alors que si $1 \leqslant i \leqslant q$ $f \circ k\left(\varepsilon_i\right) = f\left(e_i\right)$ ce qui est égal à $h\left(g\left(\varepsilon_i\right)\right) = h \circ g\left(\varepsilon_i\right)$ car $i \leqslant q \leqslant p$) et pour $i > q$, $f \circ k\left(\varepsilon_i\right) = 0 = h \circ g\left(\varepsilon_i\right)$.
- On a bien $h \circ g = f \circ k$

Exercice 11.32

→ On a $\dim\ker f = 2$ et $\dim\ker f \circ f \leqslant \dim\ker f + \dim\ker f = 4$. On a donc $\mathrm{rg}\, f^2 \geqslant 1$ (totalement inutile puisque $f^2 \neq 0$).

→ On a $f^3 = 0$ donc $\mathrm{Im}\, f^2 \subset \ker f$, donc $\mathrm{rg}\, f^2 \leqslant 2$. On a donc $\mathrm{rg}\, f^2 = 1$ ou 2.

→ On note F un supplémentaire de $\mathrm{Im}\, f^2$ dans $\mathrm{Im}\, f$: $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f^2 \oplus F$. On a alors $f(\mathrm{Im}\, f) = \mathrm{Im}\, f^2 = f(\mathrm{Im}\, f^2) + f(F) = \mathrm{Im}\, f^3 + f(F)$. Ainsi $f(F) = \mathrm{Im}\, f^2$. Si on avait $\mathrm{rg}\, f^2 = 2$, alors $\dim F = 1$ et $\dim f(F) \leqslant 1$, cela donne une contradiction et $\mathrm{rg}\, f^2 = 1$.

remarque : c'est une partie de la démonstration de la « convexité de la dimensions des images » ou du fait que les noyaux augmentent de moins en moins vite : si $\dim\ker f = 2$, alors au rang suivant on a augmenté d'au moins une dimension (sinon ça s'arrête) et d'au plus deux. Si on avait $\dim\ker f^2 = 3 = \dim\ker f + 1$, alors on aurait $\dim\ker f^3 - \dim\ker f^2 \leqslant 1$ ce qui contredit $f^3 = 0$.

Exercice 11.33

Puisque $H_1 \cup H_2$ n'est pas E tout entier, il existe un vecteur u en dehors de cette réunion. La droite $\mathrm{Vect}(u)$ est alors une droite supplémentaire à la fois pour H_1 et pour H_2.
Tout vecteur x de E se décompose de façon unique $x = x_1 + \lambda_1 u$ dans $H_1 \oplus \mathbb{K} u$ et $x = x_2 + \lambda_2 u$ dans $H_2 \oplus \mathbb{K} u$.
Soit $x \in H_1$. Il se décompose alors de façon unique en $x_2 + \lambda u$ avec $x_2 \in H_2$. On considère φ l'application de H_1 dans H_2 qui à $x \in H_1$ associe cet unique vecteur de H_2. On vérifie alors que φ convient... cela peut se faire étape par étape (on vérifie la linéarité, la surjectivité et l'injectivité) ou plus simple :
Soit p la projection sur H_2 dans la direction de $\mathbb{K} u$. On vérifie que $p(H_1) = H_2$ et que la restriction de p à H_1 est injective (et ainsi cette restriction est bijective). La surjectivité vient du fait que si $x_2 \in H_2$, alors il existe $x_1 \in H_1$ et $\mu \in \mathbb{K}$ tels que $x_2 = x_1 + \mu u$. On a alors $p(x_1) = p(x_2) = x_2$. Si $x \in H_1$ et $p(x) = 0$ alors x est dans $H_1 \cap \mathrm{Vect}(u) = \{0\}$.

Exercice 11.34

1. cours
2. On a i⇒ii : si $\psi = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \varphi_k$ et si $x \in \bigcap_{k=1}^{p} \ker\varphi_k$ alors $\psi(x) = 0$, cela donne bien l'inclusion de ii. On a également iii ⇒ ii : si chaque $\varphi_k(x)$ est nul alors leur maximum également et $|\psi(x)| \leqslant 0$ donc $\psi(x) = 0$.
3. voirs cours : on complète la famille libre $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ en une base $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ de E^* et on vérifie que l'application $f : x \mapsto (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$ est une bijection de E dans $\mathbb{C}^n$. Elle est notamment surjective et pour tout $(y_1, \ldots, y_p) \in \mathbb{C}^p$, il existe $x \in E$ tel que $(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) = (y_1, \ldots, y_p, 0, \ldots, 0)$. Notamment θ est surjective. On en déduit que $\mathrm{rg}\,\theta = p$ et que $\dim\ker\theta = n - p$. On note $F = \bigcap_{k=1}^{p} \ker\varphi_k$. On a $F = \ker\theta$ et F est de dimension $n - p$. On note $\mathscr{F}$ le sous-espace vectoriel des formes linéaires qui s'annulent sur F. Si on note $e_{p+1}, \ldots, e_n$ une base de F, complétée en une base de E, l'application $\psi \in \mathscr{F}$ est entièrement déterminée par les images des vecteurs $e_1, \ldots, e_p$. L'application $\psi \in \mathscr{F} \mapsto (\psi(e_1), \ldots, \psi(e_p)) \in C^p$ est donc bijective ce qui nous indique que $\mathscr{F}$ est de dimension p. Puisque $\mathscr{F}$ est de dimension p et qu'il contient la famille libre $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$, on en déduit que $\mathscr{F} = \mathrm{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$.
   Remarque : cette rédaction est faite pour essayer de coller à l'indication... en plus simple, on réutilise l'application f précédente et on construit une famille de vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ en tant qu'antécédent (unique pour chaque) des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ - c'est-à-dire des vecteurs e_i qui vérifient $\varphi_j(e_i) = \delta_{ij}$. On vérifie que $F = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$. On décompose ψ dans la base $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$; $\psi = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \varphi_j$.
   En évaluant en e_k, on obtient $\psi(e_k) = \lambda_k$. Notamment λ_k est nul pour $k \in [\![p+1\,;n]\!]$ puisque $F \subset \ker\psi$.
4. il est plus simple de montrer que i ⇒ iii : si $\varphi = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \varphi_k$, alors
   $$|\psi(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{p} |\lambda_k||\varphi_k(x)| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{p} |\lambda_k|\right) \max\{|\varphi_k(x)|, 1 \leqslant k \leqslant p\}$$