CHAPITRE 8 - CONVERGENCE DOMINÉE

Exercice 8.3

1. On note $f_n(t) = \dfrac{1}{1+t^{n+1}}$. On montre que f_n est intégrable sur $[1,+\infty[$ dès que $n \geqslant 1$. La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers une fonction f nulle sur $]1,+\infty[$ et valant $\frac{1}{2}$ en 1. La fonction f est bien continue par morceaux sur $[1,+\infty[$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \geqslant 1$, on a $|f_n(t)| \leqslant \dfrac{1}{1+t^2} = f_1(t)$ et f_1 est intégrable sur $[1,+\infty[$. Le théorème de convergence dominée s'applique et a_n tend vers 0.
2. On effectue le changement de variable « $u = t^{n+1}$ » ou « $t = u^{\frac{1}{n+1}}$ ». Cela donne
$$a_n = \frac{1}{n+1}\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+u} u^{\frac{1}{n+1}-1}\,du = \frac{1}{n+1}\int_1^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{n+1}}}{(1+u)u}\,du.$$
Avec le théorème de converge dominée, on montre que
$$\lim_{n\to+\infty}\int_1^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{n+1}}}{(1+u)u}\,du = \int_1^{+\infty}\frac{1}{(1+u)u}\,du$$
la domination utilisée est par exemple $0 \leqslant u^{\frac{1}{n+1}} \leqslant u^{\frac{1}{2}}$, d'où $0 \leqslant \dfrac{u^{\frac{1}{n+1}}}{(1+u)u} \leqslant \dfrac{1}{(1+u)u^{1/2}}$. Puisque la limite est non nulle - on peut même la calculer en décomposant en éléments simples : $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{du}{u(1+u)} = \ln 2$, on a $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln 2}{n}$.

Exercice 8.4

1. On utilise la relation $0 < \ln(1+x) < x$ si $x > 0$. Cela donne $0 < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$, puis $0 < n\ln(1+\frac{1}{n}) < 1$, et enfin le résultat par composition avec l'exponentielle.
2. On prolonge l'intégrale sur l'intervalle $[1,e[$: On considère la fonction f_n définie par
$$f_n(x) = \begin{cases} x^{1/n}f(x) & \text{si} \quad x \in [1,(1+1/n)^n] \\ 0 & \text{si} \quad x \in](1+1/n)^n, e[\end{cases}$$
On a alors $\displaystyle\int_1^{(1+1/n)^n} x^{1/n}f(x)\,dx = \int_1^e f_n(x)\,dx$.
   - → On fixe $x \in [1,e[$. Il existe n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $(1+1/n)^n > x$. On a alors, pour $n \geqslant n_0$, $f_n(x) = x^{1/n}f(x)$,de limite $f(x)$ lorsque x tend vers 0. La suite (f_n) converge simplement vers f sur $[1,e[$.
   - → La fonction f est continue sur $[1,e[$.
   - → Pour la domination, on a $|f_n(x)| \leqslant (1+\frac{1}{n})|f(x)| \leqslant 2|f(x)|$ si $x \in [1,(1+1/n)^n]$ et $|f_n(x)| = 0 \leqslant 2|f(x)|$ si $x \in](1+1/n)^n, e[$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [1,e[$, on a $|f_n(x)| \leqslant 2|f(x)|$. La fonction dominante est intégrable sur $[1,e[$ par hypothèse.

   Le théorème de convergence dominée peut s'appliquer et donne le résultat.

Exercice 8.5

On ne le dira pas à chaque fois mais toutes les fonctions qui apparaissent (fonctions, limites simples, fonctions dominantes) sont continues sur $\mathbb{R}^+$.

1. On note $f_n(x) = f(x)e^{-nx}$. La suite de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction nulle partout sauf en 0. Si on note M un majorant de $|f|$ sur $\mathbb{R}^+$, on a, pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x \geqslant 0$, $|f_n(x)| \leqslant Me^{-x}$ et $x \mapsto Me^{-x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On peut appliquer le théorème de convergence dominée et obtenir $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.
On effectue le changement de variable linéaire « $u = nx$ ». Cela donne
$$nI_n = \int_0^{+\infty} f\left(\frac{u}{n}\right)e^{-u}\mathrm{d}u.$$
On note $g_n(u) = f\left(\frac{u}{n}\right)e^{-u}$. On a convergence simple vers $g : x \mapsto f(0)e^{-u}$ et domination par Me^{-u}. On a donc
$$\lim_{n\to+\infty} nI_n = \int_0^{+\infty} f(0)e^{-u}\mathrm{d}u = f(0).$$
2. On a
$$nI_n - L = \int_0^{+\infty}\left(f\left(\frac{u}{n}\right) - f(0)\right)e^{-u}\mathrm{d}u$$
Pour $u \geqslant 0$ fixé, on a $f\left(\frac{u}{n}\right) - f(0) \underset{n\to+\infty}{\sim} f'(0)\frac{u}{n}$. On s'attendrait à avoir
$$nI_n - L \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_0^{+\infty} f'(0)\frac{u}{n}e^{-u}\mathrm{d}u$$

On étudie $n(nI_n - L) = \int_0^{+\infty} h_n(u)\mathrm{d}u$ où $h_n(u) = n\left(f\left(\frac{u}{n}\right) - f(0)\right)e^{-u}$. Pour tout $u \geqslant 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n(u) = uf'(0)e^{-u}$. Pour la domination, on note M_1 un majorant de $|f'|$ sur $\mathbb{R}^+$. Avec l'inégalité des accroissements finis, on a, pour tout $u \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $|h_n(u)| \leqslant nM_1 \frac{u}{n} e^{-u} = M_1 ue^{-u}$. Puisque $u \mapsto ue^{-u}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit le résultat voulu. Avec $\int_0^{+\infty} ue^{-u}\mathrm{d}u = 1$, on a

$$nI_n - f(0) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} f'(0) \text{ ou encore } I_n = \frac{1}{n} f(0) + \frac{1}{n^2} f'(0) + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 8.6

1. Le plus simple est de partir de la seconde intégrale et d'effectuer le changement « $\frac{t^2}{n} = \cos^2 x$ » soit « $t = \sqrt{n}\cos x$ ». La fonction $x \mapsto \sqrt{n}\cos x$ est $\mathscr{C}^1$ et bijective de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur $[0, \sqrt{n}]$. On obtient le résultat souhaité.
2. On définit f_n sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right)^n & \text{si } t \in [0, \sqrt{n}] \\ 0 & \text{si } t > \sqrt{n} \end{cases}.$$

→ Chaque fonction est continue sur $\mathbb{R}^+$.

→ Si $t \geqslant 0$, il existe n_0 tel que $t \leqslant \sqrt{n_0}$, et pour $n \geqslant n_0$, $t \leqslant \sqrt{n}$ d'où $f_n(t) = \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n$. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = e^{-t^2}$ (convergence simple).

→ On a, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}^+$, $0 \leqslant f_n(t) \leqslant e^{-t^2}$: c'est vrai si $t > \sqrt{n}$ et également si $t \in [0, \sqrt{n}]$ (avec $\ln(1+u) \leqslant u$). De plus $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

on a donc par le théorème de convergence dominée

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt.$$

3. On a $\sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(x)\,dx \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. À l'aide des deux questions précédentes, on obtient $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 8.7

1. On pose $f = F^2$ où $F : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ est la primitive s'annulant en 0 de $x \mapsto e^{-x^2}$. La fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$. Donc f l'est également, avec pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) = 2F'(x)F(x) = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

   Posons $h : (x,t) \mapsto \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ pour $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times [0,1]$. Pour tout $x \geqslant 0$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue sur $[0,1]$ et donc intégrable sur $[0,1]$. Pour tout $t \in [0,1]$, $x \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ avec $\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -2xe^{-(1+t^2)x^2}$. Pour $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times [0,1]$, $\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 1$ et $t \mapsto 1$ est continue et intégrable sur $[0,1]$. Donc g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ avec, pour tout $x \geqslant 0$, $g'(x) = -\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,dt = -2e^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2t^2}\,x\,dt$.
   Le changement affine $u = xt$ donne $\forall x \in \mathbb{R}^+, g'(x) = -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}\,du$.
2. D'après les calculs précédents, $f+g$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, de dérivée nulle. La fonction $f+g$ est donc constante. Or $f(0) = 0$ et $g(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$. Pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$.
3. La fonction $\varphi : t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car φ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\varphi(t) = \underset{t\to+\infty}{\mathrm{o}}(e^{-t})$. Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = I^2$. On détermine la limite de g en $+\infty$ par encadrement. Pour $x \geqslant 0$, on a $0 \leqslant g(x) \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{4}e^{-x^2}$. Par encadrement, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. En conclusion $I^2 = \frac{\pi}{4}$ et puisque $I \geqslant 0$, on obtient $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 8.8

Soit $h(x,t) = \frac{1-\cos(xt)}{t^2}e^{-t}$.

→ Soit $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{1-\cos(xt)}{t^2}e^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[$, négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ lorsque t tend vers $+\infty$ et $\frac{1-\cos(xt)}{t^2}e^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{(xt)^2}{2t^2} = \frac{x^2}{2}$ donc la fonction admet une limite finie en 0. Finalement f est définie sur $\mathbb{R}$. De plus f est paire.

→ pour tout $t > 0$, $x \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$,

→ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$,

→ pour tout $x\in\mathbb{R}$, $t\mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)=\dfrac{\sin xt}{t}e^{-t}$ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$ (arguments proches avec une limite finie x en 0),

→ pour tout $x\in\mathbb{R}$, $t\mapsto \dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t)=\cos(xt)e^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et dominée par $t\mapsto e^{-t}$, intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

On en déduit que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin xt}{t}e^{-t}\,dt$ et $f''(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos(xt)e^{-t}\,dt$. Alors

$$f''(x)=\mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty}e^{-(1-ix)t}\,dt\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-ix}\right)=\frac{1}{1+x^2}.$$

Il existe C tel que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=\arctan x+C$. Puisque $f'(0)=0$, on a $C=0$. On a enfin, avec $f(0)=0$,

$$f(x)=f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)\,dt=\int_0^x\arctan t\,dt=x\arctan x-\frac12\ln(1+x^2).$$

Exercice 8.10

1. Il faut que x^2+t^2 reste strictement positif. Puisqu'on veut étudier la continuité sur $\mathbb{R}$, on doit considérer l'intégrale sur $]0,+\infty[$. Soit alors $h:(x,t)\mapsto\dfrac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}$ définie sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, la fonction $t\mapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Si $x\neq0$, la fonction $t\mapsto h(x,t)$ est continue sur $[0,1]$. Pour $x=0$, la fonction $t\mapsto h(0,t)$ est continue sur $]0,1]$ et $h(0,t)\underset{t\to0}{\sim}2\ln t$. Dans les deux situations, la fonction $t\mapsto h(x,t)$ est intégrable sur $]0,1]$. Enfin, si $x\in\mathbb{R}$, on a $h(x,t)\underset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{2\ln t}{t^2}=\underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^{3/2}}\right)$. Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $t\mapsto h(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. On a déjà vérifié les premières hypothèses du théorème de continuité. De plus, pour tout $t>0$, $x\mapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Il est impossible d'obtenir une domination indépendante de x lorsque x parcourt $\mathbb{R}$, car, pour tout $t>0$, $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|h(x,t)|=+\infty$. Soit $A>0$. Pour $t>0$ et $x\in[-A,A]$, $\ln t^2\leqslant\ln(x^2+t^2)\leqslant\ln(A^2+t^2)$ (puisque $x^2\in[0,A^2]$ et que la fonction logarithme est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$). Cela permet de majorer $|h(x,t)|$ par $\dfrac{1}{1+t^2}\max(|\ln t^2|,|\ln(A^2+t^2)|)$. On pourrait utiliser cette fonction pour dominer ou, si on veut se débarrasser de la fonction maximum, prendre $\varphi(t)=\dfrac{|\ln t^2|+|\ln(A^2+t^2)|}{1+t^2}$ (le maximum de deux nombres positifs est inférieur à leur somme). On montre facilement que φ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car, pour tout $t>0$, on a $\varphi(t)=|h(0,t)|+|h(A,t)|$. Ainsi f est continue sur tout segment $[-A,A]$ avec $A>0$, donc f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Pour tout $t>0$, la fonction $x\mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)=\dfrac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)}$. Afin de dominer facilement cette quantité, on va majorer $|x|$ (pour majorer facilement le numérateur) et empêcher x de s'approcher de 0 (pour le dénominateur). Soit $[a,b]\subset\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x\in[a,b]$ et $t>0$, $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant\dfrac{2b}{(a^2+t^2)(1+t^2)}=\psi(t)$. La fonction ψ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (continue, limite finie en 0 et $\psi(t)=\underset{t\to+\infty}{O}(1/t^4)$). Ainsi f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$, pour tout segment $[a,b]\subset\mathbb{R}_+^*$ avec $f'(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)}\,dt$. Donc f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Afin de calculer cette intégrale, on décompose en éléments simples. Si $x>0$ et $x\neq1$, on a, pour tout $u\in\mathbb{R}^+$,
$$\frac{2x}{(x^2+u)(1+u)}=\frac{2x}{1-x^2}\left(\frac{1}{x^2+u}-\frac{1}{1+u}\right).$$
On rappelle que si $a>0$, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{\pi}{2a}$. Pour $x>0$ et $x\neq1$, $f'(x)=\dfrac{2x}{1-x^2}\left(\dfrac{\pi}{2x}-\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{1+x}$. Par continuité de f' sur $\mathbb{R}_+^*$, cette relation est valable en 1. Donc, pour tout $x>0$, $f'(x)=\frac{\pi}{1+x}$. Lorsque x est grand, on s'attend à ce que le numérateur dans l'intégrale soit proche de $\ln x^2=2\ln x$ et $f(x)$ est donc proche de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{2\ln x}{1+t^2}\,dt=\pi\ln x$. On pourrait donc étudier $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-\pi\ln(x)$ (et montrer que cette limite est nulle - ce n'est pas trop difficile mais demande un peu de travail). On peut simplement s'intéresser à une valeur particulière, par exemple 0 puisqu'on a montré la continuité de f sur $\mathbb{R}$ et ainsi $f(0)=\lim\limits_{x\to0+}f(x)=C$. Alors $f(0)=2\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{1+t^2}\,dt$. A l'aide d'un changement de variable $u=1/t$, on montrer que cette intégrale est nulle. Finalement, pour tout $x\geqslant0$, $f(x)=\pi\ln(1+x)$ et par parité, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\pi\ln(1+|x|)$ (f n'est donc pas dérivable en 0).
4. Lorsque x est grand, on s'attend à ce que $f(x)$ soit proche de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(x^2)}{1+t^2}\,dt$. Cette dernière intégrale vaut $(\pi/2)\ln x^2=\pi\ln x$. Pour $x>0$, on a
$$f(x)-\pi\ln x=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(t^2+x^2)-\ln(x^2)}{1+t^2}\,dt=\int_0^{+\infty}\frac{\ln\left(1+t^2/x^2\right)}{1+t^2}\,dt.$$
On effectue le changement linéaire $t=ux$ dans l'intégrale précédente, on obtient, si $x>0$, $f(x)-\pi\ln x=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+u^2)}{1+u^2x^2}x\,du$. Pour tout $u>0$, on a l'encadrement
$$O\leqslant x\frac{\ln(1+u^2)}{1+u^2x^2}\leqslant x\frac{\ln(1+u^2)}{u^2x^2}=\frac1x\,\frac{\ln(1+u^2)}{u^2}.$$

La fonction $u \mapsto \dfrac{\ln(1+u^2)}{u^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. En combinant tout cela, on obtient, lorsque $x>0$, $0 \leqslant f(x) - \pi \ln x \leqslant \frac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+u^2)}{u^2}\,du$. Par encadrement, on aboutit à $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\pi\ln x\right)=0$.

5. Pour tout $x>0$, on a $f'(x) = \frac{\pi}{1+x}$. Il existe un réel C tel que, pour tout $x>0$, $f(x) = \pi\ln(1+x)+C$. La question précédente donne la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de $f(x)-\pi\ln x = C+\pi\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$. Cela donne $C=0$. Pour tout $x>0$, $f(x)=\pi\ln(1+x)$ et, par parité, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\pi\ln(1+|x|)$.

Exercice 8.11

1. Soit $h(x,t) = \dfrac{\cos(xt)}{1+t^2}$ pour $(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$. La fonction h est continue sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ (on a par conséquent la continuité partielle par rapport à chaque variable) et, pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$, $|h(x,t)| \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$. Puisque $t\mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$, f est définie et continue sur $\mathbb{R}$. On obtient facilement $h(-x)=h(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, f est donc paire, ainsi que $|f(x)| \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{|\cos(xt)|}{1+t^2}\,dt \leqslant \int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$. La fonction f est bornée sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $x>0$ et $A>0$. On a $x\displaystyle\int_0^A \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,dt = \left[\frac{\sin(xt)}{1+t^2}\right]_0^A + 2\int_0^A \frac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}\,dt$, car $t\mapsto\sin(xt)$ et $t\mapsto\dfrac{1}{1+t^2}$ sont $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. Puisque $\lim\limits_{A\to+\infty}\dfrac{\sin(xA)}{1+A^2}=0$, on obtient en faisant tendre A vers $+\infty$, $xf(x) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}\,dt$.

3. On pense bien entendu à appliquer le théorème de dérivabilité. Cependant, il n'aboutira pas si on cherche à l'appliquer sur $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,dt$. En effet $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{t}{1+t^2}|\sin(xt)| \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{|\sin(xt)|}{t}$ et on peut montrer que $t\mapsto\dfrac{\sin(xt)}{t}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Le théorème n'a donc aucune chance de s'appliquer ici. On va l'appliquer à la nouvelle intégrale obtenue dans la question précédente. Soit $A=\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$. On définit g pour x positif par $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}\,dt$ et, pour $(x,t)\in A$, $h_2(x,t) = \dfrac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}$. La fonction h_2 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A. Pour tout $(x,t)\in A$, $|h_2(x,t)| \leqslant \dfrac{t}{(1+t^2)^2}$, ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}^+$, la fonction $t\mapsto h_2(x,t)$ et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. De plus, pour tout $(x,t)\in A$, on a $\left|\dfrac{\partial h_2}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\dfrac{t^2\cos(xt)}{(1+t^2)^2}\right| \leqslant \dfrac{t^2}{(1+t^2)^2}$. Le théorème de dérivation montre que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ avec, pour tout $x\in\mathbb{R}^+$, $g'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^2\cos(xt)}{(1+t^2)^2}\,dt$. Puisque, pour tout $x>0$, on a $f(x)=\frac{2}{x}g(x)$, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et, si $x>0$, $f'(x) = \frac{2}{x}g'(x) - \dfrac{2}{x^2}g(x)$. Pour $x\geqslant 0$, on a

$$g'(x) = \int_0^{+\infty}\frac{(t^2+1-1)\cos(xt)}{(1+t^2)^2}\,dt = f(x) - \int_0^{+\infty}\frac{\cos(xt)}{(1+t^2)^2}\,dt = f(x)-k(x).$$

On montre comme précédemment que k est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec, pour tout $x>0$, $k'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}\,dt = -g(x)$. Alors g' est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $g''(x) = f'(x)-k'(x) = f'(x)+g(x)$. Pour $x>0$, on obtient

$$f''(x) = \frac{2}{x}g''(x) - \frac{4}{x^2}g'(x) + \frac{4}{x^3}g(x) = \frac{2}{x}\left(f'(x)+g(x)-\frac{2}{x}g'(x)+\frac{2}{x^2}g(x)\right)$$

et avec l'écriture précédente pour $f'(x)$, il vient $f''(x) = \frac{2}{x}g(x) = f(x)$ si $x>0$.

4. La fonction f est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $y''=y$. Il existe donc des réels A et B tels que, pour tout $x>0$, $f(x) = Ae^x+Be^{-x}$. La fonction f est bornée sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que $A=0$. Par continuité de f en 0, on a $B = \lim\limits_{x\to 0}f(x) = f(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, pour tout $x\geqslant 0$, $f(x) = \frac{\pi}{2}e^{-x}$, et par parité, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\pi}{2}e^{-|x|}$. Cette écriture de f montre que f n'est pas dérivable en 0 puisque les dérivées à droite et à gauche en 0 sont différentes (et opposées).

5. La fonction $t\mapsto\dfrac{\cos t}{x^2+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ lorsque $x\neq 0$. On peut alors effectuer le changement de variable linéaire $t=ux$ (toujours si $x\neq 0$) pour se ramener à une intégrale proche de celle définissant f. Ainsi, si $x>0$,

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{x^2+t^2}\,dt = \int_0^{+\infty}\frac{\cos(ux)}{x^2(1+u^2)}x\,du = \frac{1}{x}f(x) = \frac{\pi e^{-x}}{2x}$$

Par parité, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{x^2+t^2}\,dt = \frac{\pi e^{-|x|}}{2|x|}$ pour $x\in\mathbb{R}$.

Exercice 8.12

Notons $G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$. On a $\lim_{x\to+\infty} G(x) = \ell$. On effectue une intégration par parties pour faire apparaître G (on a le comportement de G en $+\infty$ mais pas celui de g). On a, pour $A > 0$,

$$\int_0^A g(t)e^{-xt}\,dt = \left[G(t)e^{-xt}\right]_0^A + x\int_0^A G(t)e^{-xt}\,dt.$$

Lorsque A tend vers $+\infty$, on obtient $\int_0^{+\infty} g(t)e^{-xt}\,dt = x\int_0^{+\infty} G(t)e^{-xt}\,dt$. Au passage, on a prouvé que f était définie sur $\mathbb{R}_+^*$ (ce n'est pas explicitement demandé, mais il est raisonnable de se poser la question), puisque la nouvelle intégrale existe (en tant qu'intégrale d'une fonction intégrable puisque $G(t)e^{-xt} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}(e^{-xt})$). On effectue le changement de variable linéaire « $u = xt$ ». L'intégrale devient

$$f(x) = \int_0^{+\infty} G\left(\frac{u}{x}\right)e^{-u}\,du.$$

Lorsque x tend vers 0^+, on aimerait montrer que $f(x)$ tend vers $\int_0^{+\infty} \ell e^{-u}\,du = \ell$ (ce qui revient à dire que f est continue en 0). Puisqu'on ne dispose pas d'un théorème de passage à la limite version « continue », on considère une suite quelconque (x_n) de réels strictement positifs qui converge vers 0. On note $f_n(u) = G\left(\frac{u}{x}\right)e^{-u}$. Cette suite de fonctions continues et intégrables sur $\mathbb{R}^+$ converge simplement vers $u \mapsto \ell e^{-u}$ (sauf en 0 où la valeur est nulle). Puisque G est continue et admet une limite finie en $+\infty$, on en déduit que G est bornée sur $\mathbb{R}^+$. Soit M un majorant de $|G|$ sur $\mathbb{R}^+$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u \geqslant 0$, $|h_n(u)| \leqslant Me^{-u}$, expression d'une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Le théorème de convergence dominée s'applique et donne $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \int_0^{+\infty} \ell e^{-u}\,du = \ell$. Par caractérisation de la continuité par les suites, on en déduit que $\lim_{x\to0^+} f(x) = \ell = f(0)$.

Exercice 8.13

on note $h(x,t) = e^{-\left(t^2+\frac{x^2}{t^2}\right)}$ pour $(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, et pour $(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$, on a $|h(x,t)| \leqslant e^{-t^2} = \varphi(t)$. La fonction φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (elle est continue sur $\mathbb{R}^+$ et négligeable devant e^{-t} lorsque t tend vers $+\infty$). Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Pour $(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$, on a $\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -\frac{2x}{t^2}e^{-\left(t^2+\frac{x^2}{t^2}\right)}$. Une majoration simple de $e^{-\left(t^2+\frac{x^2}{t^2}\right)}$ par e^{-t^2} ne permet pas d'aboutir car $t \mapsto \frac{1}{t^2}\exp -t^2$ n'est pas intégrable sur $]0,1]$. Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$. Pour $x \in [a,b]$ et $t > 0$, $\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{2b}{t^2}e^{-\left(t^2+\frac{a^2}{t^2}\right)} = \psi(t)$. La fonction ψ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. On a $\psi(t) \underset{t\to0}{\sim} \frac{2b}{t^2}e^{-\frac{a^2}{t^2}}$, donc $\psi(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers 0 par valeurs supérieures (l'expression est de la forme $u^2e^{-u^2}$ avec u qui tend vers $+\infty$, et la limite est nulle par croissances comparées). Enfin $\psi(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Le théorème de dérivation implique que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$. Finalement f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec, pour tout $x > 0$, $f'(x) = -2\int_0^{+\infty} \frac{x}{t^2}e^{-\left(t^2+\frac{x^2}{t^2}\right)}\,dt$.
3. On cherche à relier $f'(x)$ à $f(x)$. Une intégration par parties n'aboutit pas. On cherche un changement de variable. Le seul envisageable est celui qui échange t^2 et x^2/t^2, c'est à dire $u = x/t$ ou $t = x/u$. La fonction $u \mapsto x/u$ est une bijection $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même, ainsi, si $x > 0$,
$$f'(x) = -2\int_{+\infty}^0 \frac{u^2}{x}\exp\left(-\left(u^2/x^2+u^2\right)\right)\left(-\frac{x}{u^2}\right)du = -2f(x).$$
4. La fonction f est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$. Il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x > 0$, $f(x) = Ae^{-2x}$. En utilisant la continuité de f sur $\mathbb{R}$, ainsi que $f(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, on trouve $A = f(0)$. Par parité, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2|x|}$.

Exercice 8.14

1. On justifier facilement l'existence de ces intégrales. En effectuant le changement de variable $x = \frac{1}{u}$, on obtient
$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} = -\int_{+\infty}^0 \frac{1}{1+\frac{1}{u^4}}\frac{\mathrm{d}u}{u^2} = \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{1+u^4}\mathrm{d}u$$
Cela donne l'égalité demandée. On a alors, en notant I la valeur commune,
$$2I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} + \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$$

L'application $x \mapsto x - \frac{1}{x}$ est $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$, avec une dérivée $x \mapsto 1 + frac1x^2$ strictement positive, donc la fonction réciproque est aussi de classe $\mathscr{C}^1$ et bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Cela donne

$$2I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{u^2+2} \mathrm{d}u = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\frac{x}{\sqrt{2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

et finalement $I = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

2. On note $h(x,t) = \dfrac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i} = \dfrac{e^{-x^2t^2}}{t^2+i} e^{-ix^2}$ et alors,

$$|h(x,t)| = \frac{e^{-x^2t^2}}{\sqrt{t^4+1}}$$

On vérifie les continuités par rapport à x sur $\mathbb{R}$ et t sur $\mathbb{R}^+$. On majore $|h(x,t)| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{t^4+1}} = \varphi(t)$ et φ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Cela donne la continuité. De plus, puisque, pour $t > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x,t) = 0$ et avec la même domination, on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$.

3. On a $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -2xe^{-(t^2+i)x^2} = -2xe^{-x^2t^2}e^{-ix^2}$. On a les différentes hypothèses de régularité et d'intégrabilité (avec la question précédente). On fixe $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in [a,b]$ et $t \geqslant 0$, on a

$$\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x,t) \right| \leqslant 2be^{-a^2t^2} = \psi(t),$$

et ψ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On en déduit que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$, avec de plus, pour tout $x > 0$,

$$F'(x) = -2xe^{ix^2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2x^2} \mathrm{d}t = -2e^{ix^2} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \mathrm{d}u = -\sqrt{\pi} e^{ix^2}.$$

4. Puisque F admet des limites finies en 0 et $+\infty$, on a la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} F'(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} F'(t)\mathrm{d}t = -\sqrt{\pi} \int_0^{+\infty} e^{it^2} \mathrm{d}t = \lim_{x \to +\infty} F(x) - F(0) = -F(0)$. Cela donne

$$\int_0^{+\infty} e^{-it^2} \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\pi}} F(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+i} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{t^2-i}{t^4+1} \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(1-i)I = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(1-i)\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{(1-i)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

En conjuguant (ou en prenant les parties réelles et imaginaires), on obtient enfin $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{it^2} \mathrm{d}t = \frac{(1+i)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$ et notamment $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \cos(t^2)\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$.