CHAPITRE 6 - DL, ÉQUIVALENTS

Exercice 6.1

On détermine la limite de f/g en $+\infty$. Pour $x>0$, $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ln^\alpha x}{x^{\beta-\gamma}}$.

- $\rightarrow$ si $\gamma > \beta$, alors $g(x) = \underset{\infty}{\mathrm{o}}(f(x))$,
- $\rightarrow$ si $\gamma < \beta$, alors $f(x) = \underset{\infty}{\mathrm{o}}(g(x))$,
- $\rightarrow$ si $\beta = \gamma$ et $\alpha > 0$, alors $g(x) = \underset{\infty}{\mathrm{o}}(f(x))$,
- $\rightarrow$ si $\beta = \gamma$ et $\alpha < 0$, alors $f(x) = \underset{\infty}{\mathrm{o}}(g(x))$,
- $\rightarrow$ si $\beta = \gamma$ et $\alpha = 0$, $f = g$.

Exercice 6.2

a) $\dfrac{(1-\cos x)\arcsin x}{x\tan^2 x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2/2.x}{x.x^2} = \dfrac{1}{2}$.

b) $(\ln x)^{1/x} = \exp(\frac{1}{x}\ln\ln(x))$. On a $\ln(u) = \underset{+\infty}{\mathrm{o}}(u)$ donc $\ln(\ln x) = \underset{+\infty}{\mathrm{o}}(\ln x) = \underset{+\infty}{\mathrm{o}}(x)$. Finalement $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\ln\ln(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^{1/x} = 1$.

c) $(\sin x)^x - 1 = \exp(x\ln\sin x) - 1$. Or $\sin x \underset{0}{\sim} x$ de limite nulle donc $\ln\sin x \underset{0}{\sim} \ln x$ et $x\ln(\sin x)$ tend vers 0 llorsque x tend vers 0. En utilisant $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$, on en déduit que $(\sin x)^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x\ln\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x\ln x$. De même pour le dénominateur. La limite est 1.

d) On pose $x = 1+h$. Cela donne $\dfrac{(1+h)\ln(1+h)}{2h+h^2} \underset{h\to 0}{\sim} \dfrac{h}{2h} = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 6.3

On note $f(x) = \dfrac{a}{\sin(x)} - \dfrac{b}{\ln(1-x)}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a\ln(1-x) - b\sin x}{\sin(x)\ln(1-x)} \\ &= \frac{a(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\mathrm{o}(x^3)) - b(x-\frac{x^3}{6}+\mathrm{o}(x^3))}{\sin(x)\ln(1-x)} \\ &= \frac{-(a+b)x - \frac{a}{2}x^2 + \mathrm{o}(x^2)}{\sin(x)\ln(1-x)} \end{aligned}$$

Si $a+b \neq 0$, alors $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{(a+b)x}{-x^2} = \dfrac{a+b}{x}$. Si $b = -a$ et $a \neq 0$, alors $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-(a/2)x^2}{-x^2} = a/2$. Sinon $a = b = 0$ et $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} 0$.

Exercice 6.4

a) $-\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$.

b) $\ln 2 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{96}x^4 + \mathrm{o}(x^5)$.

c) $e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2 + \mathrm{o}(x^3)$.

d) $1 - \frac{1}{2}x^3 + \mathrm{o}(x^3)$.

e) $1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + \mathrm{o}(x^2)$.

f) $-\ln x + 1 - \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{3x^2} + \mathrm{o}(1/x^2)$.

Exercice 6.5

a) $u_n \sim \dfrac{n^2}{3n^2} = 1/3$

b) $u_n \sim \dfrac{3^n}{3^n} = 1$

c) $\sqrt{n^2+1} - n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} \sim \dfrac{1}{2n}$ et $u_n \sim \dfrac{1}{2n^2}$

d) $u_n \sim 2\dfrac{\ln n}{n}$

e) $u_n \sim \dfrac{n!}{3^n}$

f) $u_n = \sqrt{\ln(1+1/n)} \sim \sqrt{1/n} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

g) puisque $\sin\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n}$ de limite nulle, on a $u_n \sim \ln\frac{1}{n}=-\ln n$

h) $u_n = n^{\frac{1}{n}}\left(1-n^{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}}\right)=e^{\frac{\ln n}{n}}\left(1-\exp(-\frac{\ln n}{n(n+1)})\right)$. En utilisant la relation $e^u-1\sim u$ en 0, on obtient $u_n\sim\frac{\ln n}{n(n+1)}\sim\frac{\ln n}{n^2}$

i) $\sqrt{n^2+n+1}=n\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n=n\left(1+\frac{1}{2}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})-\frac{1}{8}\frac{1}{n^2}+\text{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$, ce qui donne $\sqrt{n^2+n+1}=n+\frac{1}{2}+\frac{3}{8n}+\text{o}\left(\frac{1}{n}\right)$. On a alors

$$u_n=\cos\left(n\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{8n}+\text{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)=(-1)^n\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{8n}+\text{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)=(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{3\pi}{8n}+\text{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

donc $u_n\sim(-1)^{n+1}\frac{3\pi}{8n}$.

j) Si $a\in]0,1]$, $u_n\sim\frac{n^a}{n^{2a}}=\frac{1}{n^a}$ et si $a>1$, $u_n\sim\frac{1}{a^n}$.

Exercice 6.8

La fonction est évicemment de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I\backslash\{0\}$.

→ On commence par la continuité : $f(x)=\frac{\sin x-x}{x\sin x}\underset{x\to0}{\sim}-\frac{x^3/6}{x\times x}=-\frac{x}{6}$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$ et que f est continue en 0.

→ On peut étudier la dérivabilité en 0 (pas vraiment utile) : avec le calcul précédent, on a

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\underset{x\to0}{\sim}-\frac{1}{6},$$

ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0)=-\frac{1}{6}$. Cela ne garantit pas la continuité de f' en 0.

→ On a $f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{\cos x}{\sin^2 x}=\frac{x^2\cos x-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}$. On cherche la limite en 0. Le dénominateur est équivalent à x^4 en 0. On a

$$\begin{aligned}x^2\cos x-\sin^2 x &= x^2(1-\frac{x^2}{2}+O(x^4))-(x-\frac{x^3}{6}+O(x^5))^2\\ &= x^2-\frac{x^4}{2}-x^2+\frac{2x^4}{6}+O(x^6)=-\frac{1}{6}x^4+O(x^6)\end{aligned}$$

On a alors $f'(x)\underset{x\to0}{\sim}-\frac{1}{6}$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to0}f'(x)=-\frac{1}{6}=f'(0)$ et la continuité de f'. Finalement f est $\mathscr{C}^1$ sur I

remarque : on aurait pu se passer de l'étude de la dérivabilité en 0 en utilisant le théorème de prolongement du caractère $\mathscr{C}^1$: si f est continue sur $[a,b]$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a,b]$ et si f' admet une limite finie ℓ en a alors f est dérivable sur $[a,b]$ avec $f'(a)=\ell$ et f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$. **Attention** : ce n'est pas un théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$ de f puisqu'il n'y a pas à prolonger f - elle admet déjà une valeur en a.

Exercice 6.9

Soit $u=\arccos(x)$ avec x proche de 1 (par valeurs inférieures). On a $\lim\limits_{x\to1}\arccos(x)=0$ et $\cos(u)=x=1-\frac{u^2}{2}+\text{o}(u^2)$. Ainsi $2(1-x)=u^2+\text{o}(u^2)$, ce qui donne $2(1-x)\underset{x\to1}{\sim}u^2$. Puisque $u>0$, cela donne $u\underset{x\to1}{\sim}\sqrt{2(1-x)}$.

Exercice 6.10

On n'a pas de théorème qui permet d'intégrer entre 2 bornes un DL. On note $F(x)=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$ (F est la primitive de $t\mapsto\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ qui s'annule en 0 - elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$). On a $F'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=(1+x^2)^{-1/2}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\text{o}(x^4)$ et $F(0)=0$. On permet obtenir alors le DL de F en 0 : $F(x)=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\text{o}(x^5)$. On a alors

$$f(x)=F(x^2)-F(x)=(x^2+\text{O}(x^6))-(x-\frac{1}{6}x^3+\text{o}(x^3))=-x+x^2+\frac{1}{6}x^3+\text{o}(x^3)$$

Exercice 6.11

La fonction f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$, sa dérivée est $f':x\mapsto1+\frac{1}{1+x}$ qui est strictement positive. La fonction f réalise une bijection strictement croissante de $]-1,+\infty[$ sur $]-\infty,+\infty[$. La fonction admet une réciproque f^{-1} sur $\mathbb{R}$ qui est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (et $f^{-1}(0)=0$ puisque $f(0)=0$) - cela garantit l'existence d'un DL de f^{-1} en 0 à tout ordre. On écrit $f^{-1}(y)=ay+by^2+cy^3+\text{o}(y^3)$. On a $f^{-1}(f(x))=0$ pour tout $x\in]-1,1[$ (par exemple). Or $f(x)=x+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\text{o}(x^3)=2x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\text{o}(x^3)$. Par composition (on a bien $f(x)$ de limite nulle lorsque x tend vers 0), on peut substituer y par le DL de $f(x)$ en 0 (on a alors $y^3\underset{x\to0}{\sim}8x^3$ et ainsi le terme en $\text{o}(y^3)$ est un terme en $\text{o}(x^3)$. On développe, regroupe et on utilise l'unicité du DL pour obtenir les équations (termes en x, x^2 et x^3 dans le DL de $f^{-1}(f(x))$) :

$$2a = 1, 4b - \frac{a}{2} = 0 \text{ et } 8c - 2b + \frac{a}{3} = 0.$$

On trouve $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y + \frac{1}{16}y^2 - \frac{1}{192}y^3 + \mathrm{o}(y^3)$.

Exercice 6.12

→ L'équation équivaut à $\tan(x) - \frac{1}{x} = 0$. La fonction $x \mapsto \tan(x) - \frac{1}{x}$ est continue, strictement croissante sur I_n avec des limites infinies aux bornes de I_n. Par bijection, l'équation admet une unique solution sur I_n.

→ On a $n\pi - \frac{\pi}{2} < x_n < n\pi + \frac{\pi}{2}$, et, par encadrement, $\frac{x_n}{n\pi}$ tend vers 1. On a donc $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\pi$.

→ On écrit $x_n = n\pi + y_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$. On reporte dans l'équation, ce qui donne

$$1 = (n\pi + y_n)\tan(n\pi + y_n) = (n\pi + y_n)\tan(y_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\pi y_n.$$

On en déduit $y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n\pi}$.

→ De même $x_n = n\pi + \frac{1}{n\pi} + z_n$ avec $z_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(y_n)$, soit $z_= \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(\frac{1}{n})$. On reporte de nouveau et on effectue un développement asymptotique :

$$\begin{aligned} 1 &= (n\pi + \frac{1}{n\pi} + z_n)\tan(\frac{1}{n\pi} + z_n) = (n\pi + \frac{1}{n\pi} + z_n)(\frac{1}{n\pi} + z_n + \frac{1}{3\pi^3 n^3} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(\frac{1}{n^3}) \\ &= 1 + n\pi z_n + \frac{1}{3\pi^2 n^2} + \frac{1}{n^2\pi^2} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(\frac{1}{n^2}) \end{aligned}$$

d'où

$$n\pi z_n = -\frac{4}{3n^2\pi^2} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(\frac{1}{n^2}) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{4}{3n^2\pi^2}.$$

On en déduit que $z_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{4}{3n^3\pi^3}$, et

$$x_n = n\pi + \frac{1}{n\pi} - \frac{4}{3n^3\pi^3} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(\frac{1}{n^3}).$$

Exercice 6.13

1. Soit $Q(x) = x^2 - 2tx + 1$. Son discrimant est $\Delta = 4(t^2 - 1)$. Lorsque $t \in]0, 1[$, Q reste strictement positif et $\mathscr{D}_{f_t} = \mathbb{R}$. Si $t = 1$, $\mathscr{D}_{f_t} = \mathbb{R}\backslash\{1\}$. Lorsque $t > 1$, Q admet deux racines strictement positives $x_1 = t - \sqrt{t^2 - 1} < x_2 = t + \sqrt{t^2 - 1}$ (la somme est $2t > 0$, le produit 1). Alors $\mathscr{D}_{f_t} = \mathbb{R}\backslash[x_1, x_2]$.
2. Dans toutes les situations, il existe $\alpha > 0$ tel que f_t est définie et est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\alpha, \alpha[$. La fonction admet alors un développement limité à tout ordre au voisinage de 0. On note $u = x^2 - 2xt = x(x - 2t)$. Cette quantité tend vers 0 lorsque x tend vers 0. De plus $u \underset{x\to 0}{\sim} x$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a alors
$$f_t(x) = (1+u)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k u^k + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(u^n) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k (x - 2t)^k + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n).$$
En développant, le terme u^k donne des termes en x^m pour $m \in [\![k; 2k]\!]$, avec des coefficients polynomiaux en t. En regroupant les termes de même degré, on obtient une expression comme demandée.
3. On cherche une expression permettant d'écrire l'unicité des coefficients d'un développement limité. On remarque que
$$f_t'(x) = \frac{t - x}{(1 - 2xt + x^2)^{3/2}} = \frac{t - x}{1 - 2xt + t^2} f_t(x),$$
ce qui donne la relation $(1 - 2xt + x^2)f_t'(x) = (t - x)f_t(x)$ (au voisinage de 0). Soit $k \geqslant 1$. On écrit un développement limité à un ordre suffisant des deux cotés (afin d'à voir un ordre final d'au moins $k+1$), et on regarde les termes en x^k. Par unicité, on obtient
$$(k+1)P_{k+1}(t) - 2tkP_k(t) + (k-1)P_{k-1}(t) = tP_k(t) - P_{k-1}(t).$$
On récrit cela en
$$(k+1)P_{k+1}(t) = (2k+1)tP_k(t) - kP_{k-1}(t).$$
Cela donne une relation de récurrence entre les polynômes P_k, ce qui permet de les calculer facilement (on montre notamment que P_k est de degré k).