# CHAPITRE 5 - INTÉGRATION SUR UN SEGMENT

## Exercice 5.1

Par différence, on a $\int_0^1 (f - f^2) = 0$. La fonction $f - f^2$ est continue sur $[0,1]$ et positive (car $f$ est à valeurs dans $[0,1]$ donc $0 \leqslant f^2 \leqslant f$). On en déduit que $f - f^2$ est la fonction nulle. Pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) - f^2(x) = f(x)(1 - f(x)) = 0$ donc, pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = 0$ ou $1$. Or $f$ est continue sur $[0,1]$ donc $f = 0$ ou $f = 1$.

## Exercice 5.2

a) on a directement une somme de Riemann
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$
associée à la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, définie et continue sur $[0,1]$. La limite vaut alors $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.

b) On ne parvient pas à faire apparaître une somme de Riemann. Ici un simple encadrement convient :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+1}$$
ce qui donne
$$\frac{n^2}{n^2+n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} \leqslant \frac{n^2}{n^2+1}.$$
Par encadrement, la limite est 1.

c) On récrit l'expression sous la forme $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k/n}$, somme de Riemann pour la fonction continue sur $[0,1]$, $x \mapsto \frac{1}{1+x}$. La limite vaut $\int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln 2$.

d) Somme de Riemman pour $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. La limite est $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \ln(1+\sqrt{2})$ (pourquoi ?).

e) On encadre en utilisant $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$. On note $S_n$ la somme recherchée et on obtient
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n}} - \frac{n}{n^{3/2}} \leqslant S_n \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n}}.$$
chaque coté converge vers $\int_0^1 \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}$

## Exercice 5.3

On note $I$ la première intégrale. L'application $u \mapsto \pi - u$ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0,\pi]$ sur lui-même (qui laisse sin invariant). On effectue le changement de variable :
$$I = \int_\pi^0 (\pi - u) f(\sin u)\,(-du) = \int_0^\pi (\pi - u) f(\sin u)\, du = \pi \int_0^\pi f(\sin u)\, du - I.$$
On obtient $2I = \pi \int_0^\pi f(\sin u)\, du$ et le résultat. Pour la seconde égalité, on utilise le même changement de variable de classe $\mathscr{C}^1$ de $[\pi/2, \pi]$ vers $[0, \pi/2]$. On montre alors que $\int_0^{\pi/2} f(\sin u)\, du = \int_{\pi/2}^{\pi} f(\sin u)\, du$.

## Exercice 5.4

On note $I_n$ l'intégrale à chaque question.

1. $0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 x^n\, dx = \frac{1}{n+1}$. Par encadrement $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
2. $0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 e^{-nx}\, dx = \frac{1-e^{-n}}{n}$. Par encadrement $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
3. même principe : $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{\tan 1}{n+1}$.
4. La majoration précédente donne $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{n}{n+1}\tan 1$. Elle ne permet pas de conclure. On intègre par parties pour augmenter la puissance

de $n$ au dénominateur.

$$\begin{aligned} I_n &= \left[n\frac{x^{n+1}}{n+1}\tan x\right]_0^1 - \frac{n}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}(1+\tan^2 x)\,dx \\ &= \frac{n}{n+1}\tan 1 - \frac{n}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}(1+\tan^2 x)\,dx. \end{aligned}$$

Comme précédemment la nouvelle intégrale tend vers 0. Finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \tan 1$.

**Exercice 5.5**

1. Pour tout $x \in [0,1[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1+x^n} = 1$. On compare $I_n$ à $\int_0^1 1\,dx$ :
$$I_n - \int_0^1 dt = -\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx.$$
Ainsi $|I_n - 1| \leqslant \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 1$.
2. Cela revient à montre que $I_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln 2}{n}$, ou encore $\lim\limits_{n\to+\infty} n(1-I_n) = \ln 2$. On a
$$n(1-I_n) = n\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx = \int_0^1 x\frac{nx^{n-1}}{1+x^n}\,dx = \left[x\ln(1+x^n)\right]_0^1 - \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx.$$
De plus $0 \leqslant \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx \leqslant \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$, de limite nulle. On a montré ce que l'on souhaitait.

**Exercice 5.6**

→ On a $F(x) = \int_0^x tf(t)\,dt + \int_x^1 xf(t)\,dt = \int_0^x tf(t)\,dt - x\int_1^x f(t)\,dt$. Cette expression permet de montrer que $F$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ (théorème sur les primitives) et
$$F'(x) = xf(x) - xf(x) - \int_1^x f(t)\,dt = -\int_1^x f(t)\,dt = \int_x^1 f(t)\,dt.$$
On en déduit alors $F''(x) = -f(x)$ pour tout $x \in [0,1]$.

→ On a déjà $F'(u) = \int_u^1 f(t)\,dt$ si $u \in [0,1]$. Puisque $F(0) = \int_0^1 \min(0,t)f(t)\,dt = 0$, la fonction $F$ est la primitive de $F'$ qui s'annule en 0, d'où $F(x) = \int_0^x \left(\int_u^1 f(t)\,dt\right)du$.

**Exercice 5.7**

1. → Soit $g : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$. La fonction $g$ est continue sur $\mathbb{R}$. Elle admet une primitive $G$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = G(2x) - G(x)$, ce qui donne la définition, continuité et dérivabilité de $f$ sur $\mathbb{R}$, avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2g(2x) - g(x)$.
   → Par un changement de variable « $u = -t$ », on montre que $f$ est impaire. On ne l'étudie que sur $\mathbb{R}^+$.
   → On résout, sur $\mathbb{R}^+$, $f'(x) \geqslant 0$. Cela équivaut à $2\sqrt{x^4+x^2+1} \geqslant \sqrt{16x^4+4x^2+1}$, on encore, en élevant au carré (tout est positif), $x^4 \leqslant \frac{1}{4}$. La fonction $f$ est croissante sur $[0, 1/\sqrt{2}]$, puis décroissante.
   → Pour $x > 0$, on a $0 \leqslant f(x) \leqslant \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4}} = \int_x^{2x} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2x}$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
2. On a $g(0) = 1$ et $f'(0) = 2 - 1 = 1$. Puisque $f(0) = 0$, on a $f(x) - f(x) = f(x) \underset{x\to0}{\sim} xf'(0) = x$.
3. On a
$$f\left(\frac{1}{2x}\right) = \int_{\frac{1}{2x}}^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}} \underset{u=1/t}{=} \int_{2x}^{x} \frac{u^2}{\sqrt{u^4+u^2+1}}\,\frac{-du}{u^2} = f(x).$$
En combinant avec la question précédente, on a $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$.

**Exercice 5.9**

La fonction $t \mapsto \arcsin\sqrt{t}$ est continue sur $[0,1]$. Soit $A$ une de ses primitives sur ce segment. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$ (car $\sin^2 x \in [0,1]$), $\int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\,dt = A(\sin^2 x)$, ce qui permet de dériver facilement (même chose pour le second terme). On obtient le fait que $F$ est de classe

$\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$F'(x) = 2\sin x \cos x \arcsin\sqrt{\sin^2 x} - 2\sin x\cos x \arccos\sqrt{\cos^2(x)}.$$

La discussion sur les signes risque d'être pénible. Pour restreindre, on peut remarquer que $F$ est paire et de période $\pi$. Il suffit donc de l'étudier sur $[0,\pi/2]$. Pour un tel $x$, on a

$$F'(x) = 2\sin x\cos x \arcsin(\sin x) - 2\sin x \cos x \arccos(\cos x) = 0.$$

La fonction est donc constante sur $[0,\pi/2]$ et par conséquent sur $\mathbb{R}$. La valeur demandée est $F(\pi/2)$. On cherche à évaluer ailleurs. Le calcul de $F(0)$ ne donne rien de bien simple. On se rapelle que $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$. Pour les regrouper, on calcule $F(\pi/4)$ qui donne $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\pi}{2}\, dt = \frac{\pi}{4}$. D'où $\displaystyle\int_0^1 \arcsin\sqrt{t}\, dt = \frac{\pi}{4}$.

**Exercice 5.10**

On note $g$ la fonction et on effectue le changement de variable « $u = x + t$ » (translation). Cela donne

$$g(x) = \int_{a+x}^{b+x} f(u)\cos(u-x)\, du = \cos(x)\int_{a+x}^{b+x} f(u)\cos(u)\, du + \sin(x)\int_{a+x}^{b+x} f(u)\sin(u)\, du.$$

Sous cette forme, la fonction se dérive facilement (produit et théorème sur les primitives)...

**Exercice 5.11**

On note $f(x) = \frac{1}{x^2}e^{-1/x}$ pour $x > 0$, prolongée par continuité en 0 par 0. Alors $\dfrac{e^{-n/k}}{k^2} = \dfrac{1}{n^2} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$. On a ainsi

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-n/k}}{k^2} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$

On s'intéresse à la somme de Riemann. Elle converge vers $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt$. Une primitive $F$ de $f$ sur $]0,+\infty[$ est $x \mapsto e^{-1/x}$, qu'on peut prolonger par continuité par 0 en 0 pour obtenir une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt = F(1) - F(0) = 1/e$. On peut aussi utiliser le fait que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 f(t)\, dt$. Soit $\varepsilon > 0$, on a

$$\int_\varepsilon^1 f(t)\, dt = \left[e^{-1/x}\right]_\varepsilon^1 = \frac{1}{e} - e^{-1/\varepsilon},$$

ce qui redonne la valeur $1/e$ en limite. Finalement $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{ne}$.

**Exercice 5.12**

1. Pour la première inégalité, une étude de la fonction différence suffit. On peut procéder de même pour la seconde inégalité ou utiliser la concavité de la fonction logarithme : la courbe d'équation $y = \ln(1+x)$ est situé sous sa tangente en 0, d'équation $y = x$. Cela donne l'inégalité pour tout $x > -1$.
2. On aimerait passer au logarithme, mais rien de garantit que les facteurs sont positifs. En revanche $\frac{k}{n} \in [0,1]$, $f$ est continue sur $[0,1]$ donc est bornée et il existe $M > 0$ tel que $|f| \leqslant M$ sur $[0,1]$. On a alors $\left|\frac{x}{n}f(\frac{k}{n})\right| \leqslant \frac{M|x|}{n}$ et ce nombre est inférieur à $1/2$ dès que $n$ est supérieur à un certain $n_0$ (dès que $n > 2M|x|$). On peut travailler pour $n$ suffisamment grand et ainsi tous les facteurs sont strictement positifs. On note $P_n$ le produit de $n$ termes. On a alors

   $$\ln P_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{x}{n}f(\frac{k}{n})\right)$$

   Intuitivement, lorsque $n$ est grand, le facteur $\ln\left(1+\frac{x}{n}f(\frac{k}{n})\right)$ se comporte comme $\frac{x}{n}f(\frac{k}{n})$, sauf qu'on ne peut pas utiliser d'équivalent n'importe comment (ne surtout pas les sommer). On utilise l'encadrement de la première question (pour $n$ suffisamment grand toujours, afin d'avoir $\left|\frac{x}{n}f(\frac{k}{n})\right| \leqslant \frac{1}{2}$)

   $$\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) - \frac{x^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} f^2(\frac{k}{n}) \leqslant \ln P_n \leqslant \frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}).$$

   On applique le résultat sur les sommes de Riemann. Le terme de droite a pour limite $x\displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt$. On majore le terme supplémentaire :

   $$\left|\frac{x^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} f^2(\frac{k}{n})\right| \leqslant \frac{x^2}{n^2} n.M = \frac{Mx^2}{n},$$

de limite nulle lorsque $n$ tend vers $+\infty$. Finalement, par encadrement, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \ln P_n = x\int_0^1 f(t)\,dt,$$

et par continuité de l'exponentielle, $\lim_{n\to+\infty} P_n = \exp\left(x\int_0^1 f(t)\,dt\right)$.

3. Avec la fonction $f : u \mapsto \frac{1}{1+u}$, on a l'écriture générale. La limite cherchée est donc $\exp(x\ln 2) = 2^x$.

### Exercice 5.13

On découpe l'intégrale en morceaux de longueur $T$. Soit $x > 0$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nT \leqslant x < (n+1)T$. Plus précisément, on a $n = E(x/T)$, qu'on note $n(x)$. L'encadrement précédent donne $1 - \frac{T}{x} < \frac{n(x)T}{x} \leqslant 1$, ce qui donne $\lim_{x\to+\infty} \frac{n(x)}{x} = \frac{1}{T}$ (on s'en sert après). On a alors, en notant $I(x) = \int_0^x f(t)\,dt$,

$$\frac{1}{x}I(x) = \frac{1}{x}\left(\sum_{k=1}^{n(x)} \int_{(k-1)T}^{kT} f(t)\,dt + \int_{n(x)T}^{x} f(t)\,dt\right) = \frac{n(x)}{x}\int_0^T f(t)\,dt + \frac{1}{x}\int_{n(x)T}^{x} f(t)\,dt,$$

en utilisant la périodicité de $f$. Le premier terme tend vers la valeur moyenne $\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$. Pour le second terme, il suffit de majorer (on intègre sur un segment plus petit qu'une période). La fonction $f$ est continue et donc bornée sur $[0,T]$ (et donc sur $\mathbb{R}$). On note $M$ un majorant de $|f|$. Alors

$$\left|\int_{n(x)T}^{x} f(t)\,dt\right| \leqslant \int_{n(x)T}^{x} |f(t)|\,dt \leqslant \int_{n(x)T}^{(n(x)+1)T} M\,dt = MT.$$

Par majoration, on obtient une limite nulle pour le second terme, ainsi que $\lim_{x\to+\infty} \frac{I(x)}{x} = \frac{I(T)}{T}$.

### Exercice 5.14

Supposons que $f$ change $p < n$ fois de signe sur $[a,b]$. On note $a \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_p \leqslant b$ les points où $f$ s'annule en changeant de signe. On considère $P = \prod_{k=1}^{p}(X - x_k)$ et $g(t) = f(t)P(t)$. Le polynôme $P$ est de degré au plus $n-1$ et peut se développer en $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$. Par linéarité de l'intégrale, puisque $p \leqslant n-1$,

$$\int_a^b f(t)P(t)\,dt = \sum_{k=0}^{p} a_k \int_a^b t^k f(t)\,dt = 0.$$

Or la fonction $g$ est continue et de signe constant ($t - x_k$ est négatif à gauche de $x_k$ et positif après donc change le signe d'un seul coté). Puisque $g$ est d'intégrale nulle sur $[a,b]$, la fonction $g$ est identiquement nulle sur $[a,b]$. Ainsi, pour tout $t$ différent de l'un des $x_k$, on a $f(t)P(t) = 0$ et $P(t) \neq 0$ donc $f(t) = 0$. Finalement $f$ est nulle partout ce qui contredit l'hypothèse.

### Exercice 5.15

Puisque $\varphi'$ ne s'annule pas, on peut intégrer par parties :

$$\int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)}\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{1}{\varphi'(x)}\left(\varphi'(x)e^{i\lambda\varphi(x)}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{e^{i\lambda\varphi(x)}}{i\lambda\varphi'(x)}\right]_a^b + \frac{1}{i\lambda}\int_a^b \frac{\varphi''(x)}{\varphi'^2(x)}e^{i\lambda\varphi(x)})\mathrm{d}x$$

En module :

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)}\mathrm{d}\right| \leqslant \frac{1}{\lambda|\varphi'(b)|} + \frac{1}{\lambda|\varphi'(a)|} + \frac{1}{\lambda}\int_a^b \frac{|\varphi''(x)|}{\varphi'^2(x)}\mathrm{d}x$$

Puisque $\varphi''$ est de signe constant, on a $\int_a^b \frac{|\varphi''(x)|}{\varphi'^2(x)}\mathrm{d}x = \left|\int_a^b \frac{\varphi''(x)}{\varphi'^2(x)}\mathrm{d}x\right|$. On peut alors intégrer et utiliser $|\varphi'| \geqslant 1$ pour obtenir

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)}\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{2}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\left|\frac{1}{\varphi'(b)} - \frac{1}{\varphi'(a)}\right| \leqslant \frac{4}{\lambda}.$$

### Exercice 5.16

le terme dans la somme est petit, proche de $\frac{1}{k}$ lorsque $k$ est grand (ce qui sera le cas puisque $k > n$). On note $v_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ et on essaie d'étudier la différence $u_n - v_n$. On sait que $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ln 2$ (somme de Riemann - on a $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$). On regroupe les termes proches et on est amené à étudier la différence $\sin^2 x - x^2$ avec $x$ compris entre $1/\sqrt{n+1}$ et $1/\sqrt{2n}$. On a

$$\sin^2 x - x^2 = (\sin x - x)(\sin x + x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^3}{6}.(2x) = -\frac{x^4}{3},$$

on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^4} = -\frac{1}{3}$. La fonction $f$ définie par $f(x) = \frac{\sin^2 x - x^2}{x^4}$ si $x \in ]0,1]$ et $f(0) = -\frac{1}{3}$ est continue et donc bornée sur $[0,1]$. Il existe $M$ tel que, pour tout $x \in ]0,1]$, $\left|\sin^2 x - x^2\right| \leqslant Mx^4$ et cette relation est vraie pour $x = 0$.
*remarque :* on peut aussi utiliser la continuité de $f$ en 0 afin d'obtenir $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in [0,\alpha]$, $|f(x)| \leqslant 1$ (et alors travailler avec $n$ de sorte que $\frac{1}{\sqrt{n}} < \alpha$. On peut également utiliser la formule de Taylor avec reste intégral pour comparer $\sin^2 x$ à $x^2$, on encore obtenir - toujours avec la formule de Taylor - que $|\sin x - x| \leqslant \frac{|x|^3}{6}$ et ainsi

$$\left|\sin^2 x - x^2\right| = |(\sin x - x)(\sin x + x)| \leqslant 2|x|.\frac{|x|^3}{6} = \frac{x^4}{3}$$

Ça laisse pas mal de façons différentes pour obtenir ces inégalités.

Une fois que cela est fait, on a (on peut remplacer le terme $\frac{1}{3}$ par 1 ou par $M$ selon ce qu'on a fait avant)

$$|u_n - v_n| \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{3k^2} \leqslant \frac{n}{3n^2} = \frac{1}{3n}$$

cela donne $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ln 2$.

**Exercice 5.17**

1. Soit $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = M$. Par continuité, il existe $[A,B] \subset [a,b]$ contenant $x_0$ et avec $B > A$ tel que $f(x) \geqslant M - \varepsilon$ si $x \in [A,B]$. On a alors
$$\int_a^b f(t)^n\,dt \geqslant \int_A^B f(t)^n\,dt \geqslant (B-A)(M-\varepsilon)^n.$$
on a le résultat avec$\alpha = B - A > 0$.
2. Soit $\varepsilon \in ]0,M[$. On utilise $\alpha$ comme dans la question précédente et on a alors
$$\alpha(M-\varepsilon)^n \leqslant \int_a^b f(t)^n\,dt \leqslant (b-a)M^n$$
puis
$$\alpha^{1/n}(M-\varepsilon) \leqslant \left(\int_a^b f(t)^n\,dt\right)^{1/n} \leqslant (b-a)^{1/n}M.$$
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha^{1/n}(M-\varepsilon) = M - \varepsilon$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geqslant n_1$, $M - 2\varepsilon \leqslant \alpha^{1/n}(M-\varepsilon)$. De même il existe $n_2$ tel que, pour $n \geqslant n_2$, $(b-a)^{1/n}M \leqslant M + 2\varepsilon$. On déduit qu'il existe $n_0 = \max(n_1, n_2)$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$,
$$M - 2\varepsilon \leqslant \left(\int_a^b f(t)^n\,dt\right)^{1/n} \leqslant M + 2\varepsilon,$$
On a bien obtenu $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f(t)^n\,dt\right)^{1/n} = M.$

**Exercice 5.18**

v1) on note $F$ une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$. On a $f(x) = F(ax)$. Par récurrence, on montre que $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On a notamment $f'(x) = af(ax)$, $f''(x) = a^2 f'(ax) = a^3 f(a^2 x)$ et, par récurrence $f^{(n)}(x) = a^{1+2+\cdots+n} f(a^n x)$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f^{(n)}(0) = 0$. On peut appliquer la formule de Taylor avec reste intégrale à tout ordre, ce qui donne
$$f(x) = 0 + \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.$$
Si on note $M_x = \sup\limits_{t\in[0,x]} |f(t)|$, en utilisant la relation $|f^{(n+1)}(t)| \leqslant |f(a^{n+1}t)| \leqslant M_x$, on obtient $|f(x)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}M_x$. Par croissance comparée, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, si bien que $f(x) = 0$ - cela pour tout $x \in \mathbb{R}$.

v2) Plus simplement (mais ça ressemble beaucoup), on fixe $A > 0$ et on note $M = \sup\limits_{x\in[-A,A]} |f(x)|$. On a alors, pour $x \in [-A,A]$, $|f(x)| \leqslant \left|\int_0^{ax} M\,dt\right| = Ma|x| \leqslant M|x|$, puis en reportant dans la même équation, $|f(x)| \leqslant \left|\int_0^{ax} Mt\,dt\right| = M\frac{a^2x^2}{2} \leqslant \frac{Mx^2}{2}$. Par récurrence, on a

$|f(x)| \leqslant M\dfrac{|x|^n}{n!}$. Pour tout $x \in [-A, A]$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|x|^n}{n!} = 0$ ce qui donne $f(x) = 0$. La fonction $f$ est nulle sur tout segment $[-A, A]$ donc sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 5.19**

1. Si la fonction $g$ existe, alors $f'(t) = g'(t)f(t)$ et $g'(t) = \dfrac{f'(t)}{f(t)}$. On a donc, si $t_0 \in I$, $g(t) = g(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{f'(u)}{f(u)}\,du$. Réciproquement, notons $g : t \mapsto \alpha + \displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{f'(u)}{f(u)}\,du$. On choisit $\alpha$ de sorte que $g(t_0) = \alpha$ vérifie $f(t_0) = \exp(\alpha)$ (la fonction est surjective de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}^*$). On considère $h = f.\exp(-g)$. On a $h' = (f' - fg')\exp(-g) = 0$ car $g' = f'/f$. Ainsi $h$ est constante et $h(t_0) = 1$ donc, pour tout $t \in I$, $h(t) = f(t)\exp(-g(t)) = 1$ et $f(t) = \exp(g(t))$.
2. on reprend les calculs précédents. On a $g(2\pi) = g(0) + \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{f'(u)}{f(u)}\,du$. Or $f(2\pi) = f(0)$, ce qui donne $\exp(g(2\pi) - g(0)) = 1$ et il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt = 2ik\pi$.

**Exercice 5.20**

1. On peut effectuer le changement de variable « $x = \lambda t$ ». Cela donne
$$\int_0^u |\sin(\lambda t)|\,dt = \frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda u} |\sin(x)|\,dx = u\frac{1}{\lambda u}\int_0^{\lambda u} |\sin(x)|\,dx.$$
La fonction $x \mapsto |\sin x|$ est $\pi$ périodique. On montre (voir autre exercice) que
$$\lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X}\int_0^X |\sin x|\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |\sin x|\,dx = \frac{2}{\pi}.$$
Finalement, $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\displaystyle\int_0^u |\sin(\lambda t)|\,dt = \frac{2}{\pi}u$. Par différence, pour tout $\alpha, \beta > 0$,
$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_\alpha^\beta |\sin(\lambda t)|\,dt = \frac{2}{\pi}(\beta - \alpha).$$
2. On commence par traiter le cas d'une fonction en escalier puis on étend le résultat aux fonctions continues par morceaux.
   → soit $f$ en escalier sur $[a, b]$ et $a_0 = a < a_1 < \ldots < a_n = b$ une subdivision associée avec $f = m_i$ sur $]a_i, a_{i+1}[$. On a
   $$\int_a^b f(t)|\sin(\lambda t)|\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} m_i \int_{a_i}^{a_{i+1}} |\sin(\lambda t)|\,dt.$$
   Par linéarité, $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\displaystyle\int_a^b f(t)|\sin(\lambda t)|\,dt = \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1} m_i(a_{i+1} - a_i) = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(t)\,dt$.

   → Soit $\varepsilon > 0$ et $g$ une fonction en escaliers telle que $|f - g| < \dfrac{\varepsilon}{3(b-a)}$ (le dénominateur apparaît à la fin des majorations... on l'a modifié a posteriori). On a trois quantités qui sont « proches » : les intégrales de $f$ et $g$, celles multipliées par $|\sin|$ et le lien entre la fonction de $\lambda$ pour $g$ et sa limite en fonction de $g$. On va donc faire intervenir ces trois différences :
   $$\begin{aligned}
   &\left|\int_a^b f(t)|\sin(\lambda t)|\,dt - \frac{2}{\pi}\int_a^b f(t)\,dt\right| \\
   &\leqslant \left|\int_a^b f(t)|\sin(\lambda t)|\,dt - \int_a^b g(t)|\sin(\lambda t)|\,dt\right| \\
   &\quad + \left|\int_a^b g(t)|\sin(\lambda t)|\,dt - \frac{2}{\pi}\int_a^b g(t)\,dt\right| + \left|\frac{2}{\pi}\int_a^b g(t)\,dt - \frac{2}{\pi}\int_a^b f(t)\,dt\right| \\
   &\leqslant \int_a^b |f(t) - g(t)||\sin(\lambda t)|\,dt \\
   &\quad + \left|\int_a^b g(t)|\sin(\lambda t)|\,dt - \frac{2}{\pi}\int_a^b g(t)\,dt\right| + \frac{2}{\pi}\int_a^b |f(t) - g(t)||\sin(\lambda t)|\,dt \\
   &\leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \left|\int_a^b g(t)|\sin(\lambda t)|\,dt - \frac{2}{\pi}\int_a^b g(t)\,dt\right| + \frac{\varepsilon}{3}
   \end{aligned}$$
   Puisque $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\displaystyle\int_a^b g(t)|\sin(\lambda t)|\,dt = \frac{2}{\pi}\int_a^b g(t)\,dt$, il existe $A > 0$ tel que, pour tout $\lambda \geqslant A$, on ait
   $$\left|\int_a^b g(t)|\sin(\lambda t)|\,dt - \frac{2}{\pi}\int_a^b g(t)\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{3},$$
   et ainsi, pour tout $\lambda > A$,
   $$\left|\int_a^b f(t)|\sin(\lambda t)|\,dt - \frac{2}{\pi}\int_a^b f(t)\,dt\right| < \varepsilon.$$
   On a bien prouvé que le résultat subsiste si $f$ est continue par morceaux sur $[a, b]$.

**Exercice 5.21**

1. La fonction $f$ est continue par morceaux sur $[0,1]$ donc bornée. Il existe $M$ tel que $|f| \leqslant M$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|q^n f(q^n)\right| \leqslant Mq^n$. Puisque $q \in ]0,1[$, la série $\sum q^n f(q^n)$ converge absolument.
2. On commence par écrire
$$(1-q)J(q) = \sum_{n=0}^{+\infty} (q^n - q^{n+1}) f(q^n)$$
Cela fait penser à une somme de Riemann avec des points de subdivision $q^n$, sauf qu'on en a un nombre infini. On propose plusieurs méthodes :
   (a) <u>version 1</u> (déborde un peu du programme) : on note $S_N(q) = \sum_{n=0}^{N} (q^n - q^{n+1}) f(q^n)$. Cette fois on a bien une somme de Riemann associée à la subdivision $0 < q^{N+1} < q^N < \ldots < q^2 < q < 1$ (somme à droite). Son pas est le plus grand écart entre deux points consécutifs donc le maximum entre $1-q$ et $q^{N+1}$. Si on se donne $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, dès que le pas d'une subdivision est inférieur à $\alpha$. On choisit $q < 1$ tel que que $1-q < \alpha$ et $N_0$ tel que $q^{N_0+1} < \alpha$ $\left|S_N(q) - \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right| < \varepsilon$. Cela étant vrai pour tout $N \geqslant N_0$, et puisque la série précédente converge, on a alors en passant à la limite sur $N \to +\infty$,
$$\forall q \in ]0,1[, 1-q < \alpha, \left|(1-q)J(q) - \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon.$$
   (b) <u>version 2</u> : c'est moins général, on suppose que $f$ est continue et donc uniformément continue sur $[0,1]$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ dès que $|x-y| < \alpha$. Si $0 < 1-q < \alpha$, on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\left|(q^n - q^{n+1})f(q^n) - \int_{q^n}^{q^{n+1}} f(t)\mathrm{d}t\right| = \left|\int_{q^n}^{q^{n+1}} \big(f(q^n) - f(t)\big)\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon(q^n - q^{n+1})$$
puisque, pour tout $t \in [q^{n+1}, q^n]$, $|t - q^n| \leqslant |q^n - q^{n+1}| \leqslant 1 - q < \alpha$.
On a alors $\sum_{n=0}^{N} \int_{q^n}^{q^{n+1}} f(t)\mathrm{d}t = \int_{q^{N+1}}^1 f(t)\mathrm{d}t$ de limite $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ lorsque $N$ tend vers $+\infty$. Cela donne
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{q^n}^{q^{n+1}} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$$
Finalement $(1-q)J(q) - \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \left((q^n - q^{n+1})f(q^n) - \int_{q^n}^{q^{n+1}} f(t)\mathrm{d}t\right)$ et
$$\left|(1-q)J(q) - \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon(q^n - q^{n+1}) = \varepsilon \text{ pour tout } q \in ]1-\alpha, 1[.$$
   (c) <u>version 3</u> (par les fonctions en escaliers) : on commence par montrer que le résultat est vrai pour une fonction $\mathbb{1}_{[a,b]}$ avec $0 \leqslant a < b \leqslant 1$. On remarque que $(1-q)J(q)$ pour une telle fonction vaut $q^{n_0} - q^{n_1+1}$ si on a $q^{n_1+1} < a \leqslant q^{n_1} \leqslant q^{n_0} \leqslant b < q_{n_0-1}$. Lorsque $q$ tend vers 1 ($n_0$ et $n_1$ dépendent de $q$), on aura une limite $b - a = \int_0^1 \mathbb{1}_{[a,b]}(t)\mathrm{d}t$. On généralise aux fonctions en escaliers par linéarité. On fixe alors $f$, $\varepsilon > 0$ et $h$ en escaliers telle que $\|f-h\|_\infty < \frac{1}{3}\varepsilon$. On a alors (on notera $J(q,f)$ pour savoir à quelle fonction on se rapporte) :
$$(1-q)J(q,f) - \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \big((1-q)J(q,f) - (1-q)J(q,h)\big) + \left((1-q)J(q,h) - \int_0^1 h(t)\mathrm{d}t\right) + \left(\int_0^1 h(t)\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right)$$
On a $\left|(1-q)J(q,f) - (1-q)J(q,h)\right| \leqslant \frac{1}{3}\varepsilon$, $\left|\int_0^1 h(t)\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{3}\varepsilon$ et dès que $q$ suffisamment proche de 1, $\left|(1-q)J(q,h) - \int_0^1 h(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{3}\varepsilon$; Finalement $\left|(1-q)J(q,f) - \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon$ dès que $q$ suffisamment proche de 1.

**Exercice 5.23**

L'expression $f' - f$ et l'exponentielle nous invitent à poser $g(t) = f(t)e^{-t}$ afin que $g'(t) = (f'(t) - f(t))e^{-t}$. On a alors
$$g(1) - g(0) = f(1)e^{-1} = e^{-1} = \int_0^1 g'(t)\mathrm{d}t$$
d'où $e^{-1} \leqslant \int_0^1 |g'(t)|\mathrm{d}t = \int_0^1 |f'(t) - f(t)|e^{-t}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 |f'(t) - f(t)|\mathrm{d}t$. On a donc bien l'inégalité.
On cherche maintenant un cas d'égalité ou du moins à s'en rapprocher le plus possible. On regarde les différentes inégalités pour obtenir des égalités. On a besoin de
→ $f' - f \geqslant 0$ (de signe constant... on peut prendre positif),

- → pour tout $t \in [0,1]$, $(f'(t)-f(t))e^{-t} = f'(t)-f(t)$ ce qui est plus difficile à réaliser - il faut que toute la fonction $f'-f$ se concentre autour de 0
- → et toujours $f(0)=0$ et $f(1)=1$.

On peut prendre comme inconnue $f'-f=g$ - on se ramène ainsi à la condition $g \geqslant 0$ (plus simple). Une résolution d'équation différentielle donne $f(x) = e^x \int_0^x g(t)e^{-t}\mathrm{d}t$. On doit donc avoir $g \geqslant 0$ et $f(1)=1$ soit $\int_0^1 g(t)e^{-t}\mathrm{d}t = e^{-1}$. On a alors $\int_0^1 (f'-f)(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 g(t)\mathrm{d}t$. On veut se rapprocher de la valeur $e^{-1}$. On a

$$\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 g(t)e^{-t}e^t\mathrm{d}t \geqslant \int_0^1 g(t)e^{-t}\mathrm{d}t = e^{-1}$$

et pour avoir l'égalité on concentre en 0. On prend $h_n$ telle que $h_n(t) = 2n(1-nt)$ si $t \in [0,1/n]$ et $h_n(t)=0$ sinon. On prend $g_n = e^{-1}h_n/\lambda_n$ où $\lambda_n = \int_0^1 h_n(t)e^{-t}\mathrm{d}t$ de sorte que $g_n$ vérifie les bonnes conditions (on va avoir $\lambda_n$ proche de 1 - l'aire du triangle défini par $h_n$). On a alors

$$\int_0^1 g_n(t)\mathrm{d}t = e^{-1}\frac{1}{\lambda_n}$$

On montre proprement que $\lambda_n$ tend vers 1, par encadrement plutôt que par calcul complet : $\lambda_n = \int_0^{1/n} h_n(t)e^{-t}\mathrm{d}t$ donc

$$e^{-1/n} = \int_0^{1/n} h_n(t)e^{-1/n}\mathrm{d}t \leqslant \lambda_n \leqslant \int_0^{1/n} h_n(t)\mathrm{d}t = 1$$

cela donne bien une limite valant 1 et le fait qu'on se rapproche autant qu'on veut de $e^{-1}$.