CHAPITRE 4 - NORMES, SUITES

Exercice 4.1

→ existence : la fonction $t \mapsto |P(t) - P'(t)|$ est continue et positive sur $[0,1]$, donc elle est majorée et $\|P\|$ existe et est positive.
→ définie : soit P de norme nulle. La fonction polynomiale $P - P'$ est nulle sur $[0,1]$, donc le polynôme $P - P'$ est le polynôme nul. On a donc $P = P'$, ce qui est impossible pour des raisons de degré si P n'est pas le polynôme nul. Ainsi $\|P\| = 0$ entraîne $P = 0$.
→ homogénéité : si $\lambda \in \mathbb{R}$, on a
$$\sup_{t\in[0,1]} |\lambda P(t) - \lambda P'(t)| = \sup_{t\in[0,1]} |\lambda||P(t) - P'(t)| = |\lambda| \sup_{t\in[0,1]} |P(t) - P'(t)|,$$
puisque $|\lambda| \geqslant 0$. Cela donne $\|\lambda P\| = |\lambda|\,\|P\|$.
→ inégalité triangulaire : soit $P, Q \in E$. Pour tout $t \in [0,1]$,
$$|(P+Q)(t) - (P+Q)'(t)| \leqslant |P(t) - P'(t)| + |Q(t) - Q'(t)| \leqslant \|P\| + \|Q\|\,.$$
On a donc un majorant, si bien que $\|P+Q\| \leqslant \|P\| + \|Q\|$.

Exercice 4.2

→ l'application est la norme associée au produit scalaire usuel sur $M_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire celui qui à (A,B) associe $\operatorname{tr}({}^tA.B)$.
→ On effectue le calcul directement :
$$\|AB\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (AB)_{ij}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n A_{ik}B_{kj}\right)^2,$$
et l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne
$$\left(\sum_{k=1}^n A_{ik}B_{kj}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^n A_{ik}^2\right)\left(\sum_{l=1}^n B_{kl}^2\right).$$
On obtient alors
$$\|AB\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n A_{ik}^2\right)\left(\sum_{l=1}^n B_{kl}^2\right) = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n A_{ik}^2\right)\left(\sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n B_{kl}^2\right) = \|A\|^2\,\|B\|^2\,.$$

Exercice 4.3

1. On prouve les différents points :
   → existence : la fonction $t \mapsto x + ty$ est continue sur $[0,1]$ et est donc bornée. Cela donne l'existence de $N((x,y))$
   → positivité : immédiat
   → caractère défini : si $N((x,y)) = 0$ alors pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leqslant |x+ty| \leqslant 0$. Ainsi la fonction affine $t \mapsto x + ty$ est nulle est $x = y = 0$ (on peut prendre des valeurs pour t, par exemple 0 et 1).
   → homogénéité : si $\lambda \in \mathbb{R}$,
   $$\sup_{t\in[0,1]} |\lambda x + t\lambda y| = \sup_{t\in[0,1]} |\lambda||x+ty| = |\lambda| \sup_{t\in[0,1]} |x+ty|,$$
   puisque $|\lambda| \geqslant 0$.
   → inégalité triangulaire : soit (x,y) et (x',y') deux éléments de $\mathbb{R}^2$. Pour tout $t \in [0,1]$, on a
   $$|(x+x') + t(y+y')| \leqslant |x+ty| + |x'+ty'| \leqslant N((x,y)) + N((x',y')).$$
   Cela étant valable pour tout $t \in [0,1]$, on a bien $N((x,y)+(x',y')) \leqslant N((x,y)) + N((x',y'))$.

   L'application est bien une norme.
2. On détermine la boule fermée (plus facile avec les bornes supérieures) unité. On a $N((x,y)) \leqslant 1$ si et seulement si, pour tout $t \in [0,1]$, $|x+ty| \leqslant 1$. Les valeurs extrêmes de $x+ty$ sont en 0 et 1 si bien que $N((x,y)) = \max(|x|, |x+y|)$. Ainsi (x,y) est dans la boule fermée unité si et seulement si $|x| \leqslant 1$ et $|x+y| \leqslant 1$. On trace les bords du domaine $x = \pm 1$ et $x+y = \pm 1$. La boule est à l'intérieur.
3. Pour se donner une idée des constantes, on essaie de placer les différentes boules unités les unes dans les autres. Si on a deux normes N_1 et N_2 : la relation $N_1 \leqslant \alpha N_2$ donne que $\overline{B}_{N_2}(0,1) \subset \overline{B}_{N_1}(0,\alpha)$ et réciproquement. On cherche le plus petit $\alpha > 0$ tel que $\overline{B}_{N_2}(0,1) \subset \overline{B}_{N_1}(0,\alpha)$ ce qui donnera la meilleure constante telle que $N_1 \leqslant N_2$. Il n'y a alors plus qu'à le démontrer…

Exercice 4.4

1. On introduit $\Phi : (f,g) \in E^2 \mapsto f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,dt$. Il est clair que Φ est une forme bilinéaire symétrique et positive. Montrons qu'elle est définie. Soit f un élément de E tel que $\Phi(f,f) = 0$. On a alors $\Phi(f,f) = f(0)^2 + \int_0^1 f'^2(t)\,dt = 0$. Cela donne $f(0) = 0$ et, puisque f'^2 est continue et positive sur $[0,1]$, $f' = 0$. Ainsi f est constante, et donc nulle puisque $f(0) = 0$. Ainsi, Φ est un produit scalaire et N est la norme euclidienne associée.

2. On écrit que pour tout $t \in [0,1]$, $f(t) = f(0) + \int_0^t f'(u)\,du$, ce qui donne
$$\left|f(t)\right| \leq \left|f(0)\right| + \int_0^t \left|f'(u)\right|\,du \leqslant \left|f(0)\right| + \int_0^1 \left|f'(u)\right|\,du.$$
On sait que pour a et b réels, on a $ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$, et on en déduit que $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$. Il vient alors
$$\left(|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,dt\right)^2 \leqslant 2\left(|f(0)|^2 + \left(\int_0^1 |f'(t)|\,dt\right)^2\right).$$
D'autre part on a, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,
$$\left(\int_0^1 |f'(t)|\,dt\right)^2 \leqslant \int_0^1 dt \cdot \int_0^1 f'(t)^2\,dt = \int_0^1 f'(t)^2\,dt.$$
D'où $\left|f(0)\right| + \int_0^1 \left|f'(t)\right|\,dt \leqslant \sqrt{2}\sqrt{\left|f(0)\right|^2 + \int_0^1 \left|f'(t)\right|^2\,dt}$, et donc pour tout $t \in [0,1]$ $\left|f(t)\right| \leqslant \sqrt{2}N(f)$, d'où $\left\|f\right\|_\infty \leqslant \sqrt{2}N(f)$.
3. Utilisons la suite de fonctions de l'énoncé : pour $n \geqslant 1$, on a $\|f_n\|_\infty = 1$ et $N(f_n) = \frac{n}{\sqrt{2n-1}}$. On a $\lim_{n\to+\infty} \frac{N(f_n)}{\|f_n\|_\infty} = \frac{n}{\sqrt{2n-1}} = +\infty$. Les normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 4.5

On vérifie assez facilement l'existence, la positivité, l'homogénéité et l'inégalité triangulaire. Il reste le caractère défini. On a $N(Q) = 0$ si et seulement si Q s'annule en chacun des x_k.

→ si $p+1 > n$ (ou $p \geqslant n$) alors $N(Q) = 0$ entraîne $Q = 0$. On a bien une norme,

→ si $p < n$: on considère le polynôme $Q = \prod_{k=0}^{p}(X - x_k)$. Il est de degré $p+1 \leqslant n$, non nul et $N(Q) = 0$. On n'a donc pas une norme.

Exercice 4.6

Supposons qu'il existe $x \in E$, non nul, tel que $N_1(x) < N_2(x)$. On note $y = x/N_2(x)$. On a alors $N_1(y) < N_2(y) = 1$ donc $y \in B_1 = B_2$ d'où $N_2(y) < 1$ ce qui donne une contradiction. On fait de même si $N_2(x) < N_1(x)$.

Exercice 4.7

→ existence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, les intégrales $I_n = \int_0^1 f(t)t^n\mathrm{d}t$ existent (fonctions continues sur $[0,1]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|\int_0^1 f(t)t^n\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$. La borne supérieure existe.

→ On a, pour $\lambda \in \mathbb{R}$,
$$N(\lambda f) = \sup\left\{\left|\int_0^1 \lambda f(t)t^n\mathrm{d}t\right|; n \in \mathbb{N}\right\} = \sup|\lambda|\left\{\left|\int_0^1 f(t)t^n\mathrm{d}t\right|; n \in \mathbb{N}\right\} = |\lambda|N(f).$$

→ si $n \in \mathbb{N}$ et $f, g \in E$,
$$\left|\int_0^1 \lambda(f+g)(t)t^n\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_0^1 \lambda f(t)t^n\mathrm{d}t\right| + \left|\int_0^1 \lambda g(t)t^n\mathrm{d}t\right| \leqslant N(f) + N(g)$$
Cela étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $N(f+g) \leqslant N(f) + N(g)$.

→ Si $N(f) = 0$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 \lambda f(t)t^n\mathrm{d}t = 0$ et pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, $\int_0^1 \lambda f(t)P(t)\mathrm{d}t = 0$. Il existe une suite de polynôme P_n qui converge vers f pour la norme infinie, alors
$$\left|\int_0^1 f^2(t)\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)P_n(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \|f\|_\infty \|f - P_n\|_\infty,$$
de limite nulle lorsque n tend vers $+\infty$. Cela donne $\int_0^1 f^2(t)\mathrm{d}t = 0$ et $f = 0$.

Exercice 4.8

1. Pour la première norme, c'est du cours. La norme N est bien définie (la suite $(u_{n+1} - u_n)$ est bornée) et positive. Si $N(u) = 0$ alors la suite u est constante. Puisque $u_0 = 0$, la suite est nulle. L'homogénéité et l'inégalité triangulaire se montrent de façon standard.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - u_n| \leqslant 2N_\infty(u)$, donc $N(u) \leqslant 2N_\infty(u)$.
3. On cherche à montrer que N_∞/N n'est pas bornée : par exemple un cherche une suite de suites $(u^{(k)})$ telle que $N(u^{(k)}) = 1$ et $N_\infty(u^{(k)})$ tend vers $+\infty$ lorsque k tend vers $+\infty$. On considère la suite $u^{(k)}$ telle que $u_n^{(k)} = n$ si $n \leqslant k$ et $u_n^{(k)} = k$ si $n \geqslant k$ (elle monte de 1 en 1 et

s'arrête au rang k). Alors $N(u^{(k)}) = 1$ et $N_\infty(u^{(k)}) = k$, si bien que $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \frac{N_\infty(u^{(k)})}{N(u^{(k)})} = +\infty$. Les normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 4.9

1. On propose deux méthodes :
→ l'inégalité est vraie si l'un des réels est nul. On suppose que les deux sont strictement positifs. On écrit alors
$$\alpha\beta = (\alpha^p)^{1/p}(\beta^q)^{1/q}.$$
En prenant le logarithme, on a
$$\ln(\alpha\beta) = \frac{1}{p}\ln(\alpha^p) + \frac{1}{q}\ln(\beta^q).$$
Puisque la fonction logarithme est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ (avec des termes positifs), on a
$$\ln\left(\frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}\right) \geqslant \frac{1}{p}\ln(\alpha^p) + \frac{1}{q}\ln(\beta^q).$$
Cela donne le résultat par composition par la fonction croissante exponentielle.
→ on fixe $\beta > 0$. On pose $f(\alpha) = \alpha\beta - \frac{\alpha^p}{p}$ pour $\alpha \geqslant 0$. La fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $f'(\alpha) = \beta - \alpha^{p-1}$. La fonction est nulle en 0, de limite $-\infty$ en $+\infty$ et possède un maximum global lorsque $\alpha = \beta^{\frac{1}{p-1}}$. On calcule la valeur en ce point :
$$f(\beta^{\frac{1}{p-1}}) = \beta^{1+\frac{1}{p-1}} - \frac{1}{p}\beta^{\frac{p}{p-1}} = \beta^{\frac{p}{p-1}}(1-\frac{1}{p}) = \frac{1}{q}\beta^q.$$
2. On se place dans le cas indiqué. Pour tout $t \in [a,b]$, on a
$$|f(t)||g(t)| \leqslant \frac{1}{p}|f(t)|^p + \frac{1}{q}|g(t)|^q.$$
En intégrant entre a et b, on obtient
$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)||g(t)|\,dt \leqslant \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1.$$
De le cas général, on note $I_1 = \left(\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$ et $I_2 = \left(\int_a^b |g(t)|^q\,dt\right)^{1/q}$. Si l'une de ces intégrales est nulle, alors la fonction correspondante est nulle et l'inégalité est vraie. Sinon on considère $\tilde{f} = \frac{f}{I_1}$. On a
$$\int_a^b |\tilde{f}(t)|^p\,dt = \frac{1}{\displaystyle\int_a^b |f(t)|^p\,dt}.\int_a^b |f(t)|^p\,dt = 1.$$
On a le même résultat pour la fonction $\tilde{g} = g/I_2$. On applique le résultat précédent, ce qui donne
$$\left|\int_a^b \tilde{f}(t)\tilde{g}(t)\,dt\right| = \frac{1}{I_1I_2}\left|\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right| \leqslant 1,$$
ce qui donne $\left|\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right| \leqslant I_1I_2$, c'est-à-dire le résultat.
3. On utilise l'écriture conseillée, on obtient alors
$$\int_a^b |f+g|^p \leqslant \int_a^b |f|.|f+g|^{p-1} + \int_a^b |g|.|f+g|^{p-1}.$$
On applique l'inégalité de Hölder à chacune des deux intégrales. La première donne
$$\int_a^b |f|.|f+g|^{p-1} \leqslant \left(\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}\left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^{(p-1)q}\,dt\right)^{1/q}.$$
Puisque $1/p+1/q = 1$, soit $pq = p+q$, on a $(p-1)q = pq-q = p$. Cela donne la majoration
$$\int_a^b |f|.|f+g|^{p-1} \leqslant \left(\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}\left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^p\,dt\right)^{1/q}.$$
De même,
$$\int_a^b |g|.|f+g|^{p-1} \leqslant \left(\int_a^b |g(t)|^p\,dt\right)^{1/p}\left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^p\,dt\right)^{1/q},$$
ce qui donne en ajoutant,
$$\int_a^b |f+g|^p \leqslant \left(\left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g|^p\right)^{1/p}\right)\left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{1/q}.$$
Si $\int_a^b |f+g|^p = 0$ l'inégalité cherchée est vraie, sinon, on peut diviser par $\left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{1/q}$, ce qui donne, en utilisant $1-\frac{1}{q} = \frac{1}{p}$, la relation.

4. L'application est bien définie et positive. L'homogénéité est immédiate. Si $\int_a^b |f|^p = 0$, puisque $|f|$ est continue et positive, alors f est nulle. L'inégalité triangulaire est prouvée au dessus.

Exercice 4.10

On écrit $z_n = r_n e^{i\theta_n}$. On a alors $z_{n+1} = r_n\left(\frac{e^{i\theta_n}+1}{2}\right) = r_n e^{i\theta_n/2}\cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right)$. On obtient les relations $\theta_{n+1} = \frac{1}{2}\theta_n$ et $r_{n+1} = r_n\cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right)$. On obtient facilement $\theta_n = \frac{\theta_0}{2^n}$ et

$$r_n = r_0\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right) = r_0\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin(\theta_0/2^{k-1})}{2\sin(\theta_0/2^k)} = r_0\frac{\sin(\theta_0)}{2^n\sin(\theta_0/2^n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} r_0\frac{\sin\theta_0}{2^n\theta_0/2^n}.$$

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} z_n = r_0\frac{\sin\theta_0}{\theta_0}$.

Exercice 4.11

1. On a $P_n'(x) = nx^{n-1}+1$ et P_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Puisque $P_n(0) = -1$ et $\lim_{n\to+\infty} P_n(x) = +\infty$, on en déduit l'existence d'une unique racine positive x_n. On remarque également que $P_n(1) = 2-1 = 1$, on a donc $x_n \in]0,1[$.
2. On a $P_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1}+x_n-1 < x_n^n - x_n + 1 = 0$. Ainsi $P_{n+1}(x_n) < 0$ et $P_{n+1}(x_{n+1}) = 0$. Par croissance de P_{n+1}, on obtient $x_n < x_{n+1}$ et la suite (x_n) est strictement croissante. Puisqu'elle est majorée par 1, elle converge vers $\ell \in]0,1]$. Supposons $\ell < 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \leqslant \ell$ et $x_n^n \leqslant \ell^n$, ainsi $\lim_{n\to+\infty} x_n^n = 0$. Puisque $P_n(x_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, un passage à la limite donne $0+\ell-1 = 0$ et une contradiction. On en déduit que $\ell = 1$.

Exercice 4.12

1. On montre les proposition par récurrence
2. On cherche des solutions sous la forme r^n. Une telle suite (r^n), avec $r \neq 0$, est solution si et seulement si $r^2 = r+1$. Cela donne $r = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Il existe donc α et β tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. On détermine alors α et β avec u_0 et u_1 :

$$\alpha+\beta = 1 \text{ et } \alpha\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)+\beta\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big) = 1$$

Cela donne $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ et $\beta = -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$. Finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).$$

3. On a $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \in]-1,0[$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
4. (a) On a $v_2 = 2$ et ainsi $v_2 \geqslant v_1 \geqslant v_0$. On montre par récurrence, la propriété $\mathscr{P}(n)$: « pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $v_{k+1} \geqslant v_k$ ». La propriété est vraie aux rangs 0 et 1. Si elle est vraie à un rang $n \geqslant 1$, alors

$$v_{n+2} - v_{n+1} = v_{n+1}^\alpha - v_{n-1}^\alpha$$

or $v_{n+1} \geqslant v_n \geqslant v_{n-1} > 0$ et la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$. On a donc $v_{n+2} \geqslant v_{n+1}$. Par récurrence, on obtient le résultat.

(b) Une éventuelle limite vérifie $\ell = 2\ell^\alpha$ d'où $\ell^{1-\alpha} = 2$ et $\ell = 2^{1/(1-\alpha)}$.

(c) si $\alpha \in]0,1[$ alors $1/(1-\alpha) > 1$ et $\ell > 2$. On montre par récurrence que $v_n \leqslant \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. C'est vrai pour les rangs $0,1$ (et 2). Si pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on a v_n et v_{n+1} inférieurs à ℓ alors $v_{n+2} \leqslant 2\ell^\alpha = \ell$. La suite est croissante, majorée par ℓ et converge. la seule limite possible étant ℓ, elle converge vers ℓ.

(d) Si $\alpha > 1$ alors $1/(1-\alpha) < 0$ et $\ell < 1$. La suite étant croissante, si elle convergeait, elle le ferait vers $\ell \geqslant v_2 = 2$. La suite diverge vers $+\infty$.

Exercice 4.13

→ Soit $f : x \mapsto e^x + x$. On montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Cela donne l'existence et l'unicité du réel x_n, avec, de plus, $x_n = f^{-1}(n)$ (relation importante - on trouve plein de propriétés avec elle). Puisque $\lim_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = +\infty$ (bijection réciproque de f qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$), on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$. On peut également montrer, puisque f et donc f^{-1} sont croissantes, que (x_n) est croissante (par vraiment utile mais bon).

→ Puisque x_n est de limite infini et que $x = \underset{x\to+\infty}{o}\, e^x$, on a $n = e^{x_n} + x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{x_n}$. Les limites étant infinies, on peut composer par le logarithme, si bien que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

→ On écrit $x_n = \ln n + y_n$ avec $y_n = \underset{n\to+\infty}{o} \ln n$. On reporte dans l'équation. Cela donne

$$e^{\ln n + y_n} + \ln n + y_n = n = ne^{y_n} + \ln n + y_n.$$

On a donc $n(1-e^{y_n}) = \ln n + y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$ et $1-e^{y_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}$, de limite nulle. Cela donne d'une part le fait que y_n tend vers 0, puis $1-e^{y_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -y_n$. Finalement $y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln n}{n}$.

→ On recommence avec $x_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} + z_n$ avec $z_n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{\ln n}{n}\right)$... mais ça devient pénible. On trouve $z_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n^2}$.

On peut aussi transformer l'équation en $x_n = \ln(n - x_n)$ et effectuer le même genre de calculs, mais cette fois en un peu plus simple

Exercice 4.15

1. (a) Puisque G n'est pas réduit à $\{0\}$, il existe un élément non nul dans G. Si cet élément $x \in G$ est strictement négatif alors $-x \in G$ et ainsi G contient un élément strictement positif. Ainsi $G \cap \mathbb{R}_+^*$ est non vide, minoré par 0 et admet une borne inférieure.
   (b) Supposons que $a \notin G$. Il existe un élément $b \in]a, 2a[$ et $b \in G$. Puisque $b > a$, il existe un élément $c \in a, b[$ avec $c \in G$. Alors $b - c \in G$, $b - c > 0$ et $b - c < 2a - a = a$. Cela contredit la définition de a. Finalement $a \in G$. On montre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n.a \in G$ et par symétrie, $a\mathbb{Z} \subset G$. réciproquemet, soit $x \in G$. Il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $na \leqslant x < (n+1)a$. Alors $x - na \in G$ et $0 \leqslant x - na < a$. Ainsi $x - na = 0$ et $x \in a\mathbb{Z}$.
   (c) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $y \in G$ et $y \in]0, \varepsilon[$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $ny \leqslant x < (n+1)y$. Alors $z = ny \in G$ et $|x - z| < \varepsilon$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, il existe $z \in G$ tel que $|x - z| < \varepsilon$. Ainsi G est dense dans $\mathbb{R}$.
2. On considère $G = \theta\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z} = \left\{n\theta + 2m\pi, (n,m) \in \mathbb{Z}^2\right\}$. G est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. Supposons qu'il est discret, sous la forme $a\mathbb{Z}$. Il existe alors $k_1 \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = k_1 a$ et $k_2 \in \mathbb{Z}$ tel que $2\pi = k_2 a$. Alors $\frac{\theta}{\pi} = 2\frac{k_1}{k_2} \in \mathbb{Q}$ ce qui est une contradiction. Le sous-groupe G est donc dense dans $\mathbb{R}$. De plus $\sin(n\theta + 2m\pi) = \sin(n\theta)$ si bien que $\left\{\sin(n\theta + 2m\pi), (n,m) \in \mathbb{Z}^2\right\} = \{\sin(n\theta), n \in \mathbb{Z}\}$. Puisque G est dense dans $\mathbb{R}$, $\sin(G)$ est dense dans $\sin(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
3. Le principe : on fixe x et $\varepsilon > 0$, on choisit n_0 tel que $|u_{n+1} - u_n| < \varepsilon$ si $n \geqslant n_0$, on descend sous x puis on remonte jusqu'à dépasser x pour la première fois... soit $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ et n_0 comme au dessus. Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} - v_p < x$ puisque $\lim\limits_{p\to+\infty} u_{n_0} - v_p = -\infty$. On considère alors la suite $(u_n - v_p)_{n \geqslant n_0}$. Cette suite diverge vers $+\infty$. Considérons le premier entier $n_1 \geqslant n_0$ tel que $z = u_{n_1+1} - v_p > x$ et soit $y = u_{n_1} - v_p$. On a $y \leqslant x < z$ et $|z - y| = |u_{n_1+1} - u_{n_1}| < \varepsilon$. On a bien trouvé un élément de $h \in H$ tel que $|x - h| < \varepsilon$. L'ensemble est dense dans $\mathbb{R}$.
4. On applique alors le même principe qu'au dessus avec $u_n = \pi\sqrt{n}$ et $v_p = 2p\pi$ (on a bien $u_{n+1} - u_n$ de limite nulle).

Exercice 4.20

1. La fonction $t \mapsto |P(t)Q(t)|$ est continue et positive sur $[-1, 1]$ d'où l'existence et la positivité de $N_Q(P)$. Une fois cela fait, on utilise les propriétés de la norme infinie sur $[-1, 1]$ pour obtenir :
   → $N_Q(P) = 0 \Leftrightarrow \|PQ\|_\infty = 0 \Leftrightarrow PQ = 0 \Leftrightarrow P = 0$ puisque Q n'est pas le polynôme nul,
   → $N_Q(\lambda P) = \|\lambda PQ\|_\infty = |\lambda|\,\|PQ\|_\infty = |\lambda| N_Q(P)$,
   → $N_Q(P_1 + P_2) = \|P_1Q + P_2Q\|_\infty \leqslant \|P_1Q\|_\infty + \|P_2Q\|_\infty = N_Q(P_1) + N_Q(P_2)$.
2. Supposons que Q ne s'annule pas sur $[-1, 1]$. Il existe $m, M > 0$ tels que, pour tout $t \in [-1, 1]$, $m \leqslant |Q(t)| \leqslant M$ et ainsi $m|P(t)| \leqslant |PQ(t)| \leqslant M|P(t)|$
   → pour tout $t \in [-1, 1]$, $|PQ(t)| \leqslant M|P(t)| \leqslant MN_1(P)$ donc $N_Q(P) \leqslant MN_1(P)$
   → pour tout $t \in [-1, 1]$, $m|P(t)| \leqslant |PQ(t)| \leqslant N_Q(P)$ donc $mN_1(P) \leqslant N_Q(P)$
   Dans ce cas les normes sont équivalentes.
   Supposons maintenant que Q s'annule en $a \in]-1, 1[$ (le principe est le même si c'est en ± 1 avec une gestion du côté). On a toujours $N_Q(P) \leqslant MN_1(P)$. On va construite un polynôme P telle que $N_1(P) = \|P\|_\infty = 1$ et $N_Q(P)$ aussi proche de 0 que souhaité. On se donne $\varepsilon > 0$. Puisque $Q(a) = 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $I = [a - \eta, a + \eta] \subset [-1, 1]$ et, pour tout $t \in I$, $|Q(t)| \leqslant \varepsilon$. Soit $R = 1 - \lambda(X - a)^2$ avec $\lambda > 0$. On a $R(a) = 1$ et $R \leqslant 1$. On prend λ suffisamment petit de sorte que $R(1) = 1 - \lambda(1 - a)^2$ et $R(-1)$ soient positifs. On a alors pour tout $t \in [-1, 1]$ avec $t \neq a$, $0 \leqslant R(t) < 1$. On note alors $P_n = R^n$. On a alors
   $$\mathbb{N}_Q(P_n) \leqslant \sup_{t \in [-1,1] \setminus I} |P_nQ(t)| + \sup_{t \in I} |P_nQ(t)| \leqslant M(1 - \lambda\eta^2)^n + \varepsilon.$$
   sur $[-1, 1] \setminus I$, R et P_n sont maximaux en $a \pm \eta$. Il existe donc n_0 tel que $N_Q(P_{n_0} \leqslant 2\varepsilon$ et $\frac{N_A(P_{n_0})}{N_1(P_{n_0}} \leqslant 2\varepsilon$. On a donc la non-équivalence des normes.

Exercice 4.21

1. On fixe $n \in \mathbb{N}$. Si la suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ était bornée alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ le serait aussi (il n'y a qu'un nombre fini de termes avant n_0). On a donc $U_n = +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\limsup u_n = +\infty$.
2. la suite est bornée - ainsi U_n et V_n sont définis pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) Puisque $\{u_k, k \geqslant n+1\} \subset \{u_k, k \geqslant n\}$, on a $U_{n+1} \leqslant U_n$. La suite (U_n) est donc décroissante. Elle est minorée par tout minorant de u. On en déduit qu'elle converge. De même $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée donc converge.

(b) Avec les notations précédentes : soit $N \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \geqslant N$, $u_n \leqslant v_n \leqslant V_n \leqslant V_N$. Ainsi $U_N \leqslant V_N$. Cela étant vrai pour tout N, l'existence des limites donne $\limsup u_n \leqslant \limsup v_n$.

(c) Soit φ une valeur d'adhérence de la suite et ψ une extractrice telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\psi(n)} = \varphi$. Soit $N \in \mathbb{N}$. Soit n_0 tel que $\psi(n_0) \geqslant N$. Par croissance de ψ, pour tout $n \geqslant n_0$, on a $\psi(n) \geqslant N$ et ainsi $u_{\psi(n)} \leqslant U_N$. On en déduit, lorsque n tend vers $+\infty$ que $\varphi \leqslant U_N$. On a donc, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\varphi \leqslant U_N$ donc $\varphi \leqslant \limsup u_n$. De même pour l'autre inégalité.

(d) Si $\limsup u_n = \liminf u_n = \ell$, alors la seule valeur d'adhérence de u est ℓ. La suite étant bornée, elle converge vers son unique valeur d'adhérence. Réciproquement, si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. On se donne $\varepsilon > 0$. Il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant \ell + \varepsilon$. On en déduit que $U_{n_0} \leqslant \ell + \varepsilon$ et par décroissance de la suite U, sa limite est aussi inférieure à $\ell + \varepsilon$. On a donc $\limsup u_n \leqslant \ell + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ donc $\limsup u_n \leqslant \ell$. De la même façon, $\liminf u_n \geqslant \ell$. En combinant avec l'inégalité entre $\limsup$ et $\liminf$, on en déduit qu'elles sont toutes les deux égales à ℓ.

(e) il reste à montrer que $a = \limsup u_n$ est une valeur d'adhérence de la suite u et pour cela, on doit construire une extractrice ψ telle que $\lim u_{\psi(n)} = a$. On va construire ψ, strictement croissante, telle que $|u_{\psi(n)} - a| \leqslant \frac{1}{n}$ (par exemple). On peut choisir $\psi(0) = 0$. On suppose avoir construit $\psi(0) < \psi(1) < \ldots < \psi(n-1)$ avec $|u_{\psi(k)} - a| \leqslant \frac{1}{k}$ pour k allant de 1 à $n-1$. On note $N = \psi(n-1)$. Il existe $m > N$ tel que $a \leqslant U_m < a + \frac{1}{n}$. Par définition de U_m, il existe $k \geqslant m$ tel que $u_k \geqslant U_m - \frac{1}{n} \geqslant a - \frac{1}{n}$. On a également, puisque $k \geqslant m$, $u_k \leqslant U_m \leqslant a + \frac{1}{n}$. On a donc construit un entier $k \geqslant m > N = \psi(n-1)$ tel que $|u_k - a| \leqslant \frac{1}{n}$. On note $\psi(n) = k$ et on a bien $\psi(n) > \psi(n-1)$ et $\left|u_{\psi(n)} - a\right| \leqslant \frac{1}{n}$.

3. (a) On a $m = qn + r = (q-1)n + (n+r)$. On a donc $u_m \leqslant u_{(q-1)n} + u_{n+r}$. On montre par récurrence simple que $u_{(q-1)n} \leqslant (q-1)u_n$. Cela donne le résultat.

(b) On a par récurrence $u_m \leqslant m.u_1$ donc $\frac{u_m}{m} \leqslant u_1$. La suite $\left(\frac{u_m}{m}\right)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est majorée, ce qui suffit pour définir sa limite supérieure. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on reprend la division euclidienne de m par n : $m = qn + r$. On a $\frac{u_m}{\leqslant}(q-1)u_n + u_{n+r}$. Ainsi

$$\frac{u_m}{m} \leqslant \frac{q-1}{m} u_n + \frac{u_{n+r}}{m}$$

On note $M = \max(u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{2n-1})$. On a $m \geqslant (q-1)n$ donc $\frac{q-1}{m} \leqslant \frac{1}{n}$. On a donc, pour tout $m \geqslant 2n$,

$$\frac{u_m}{m} \leqslant \frac{u_n}{n} + \frac{M}{m}$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} + \frac{M}{m} = \frac{u_n}{n}$, les résultats précédents (comparaison des $\limsup$ et égalité avec la limite en cas de convergence), donnent $\limsup \frac{u_m}{m} \leqslant \frac{u_n}{n}$. On adonc montré que $\limsup \frac{u_m}{m}$ était un minorant de la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)$. On a donc $\limsup \frac{u_m}{m} \leqslant \liminf \frac{u_m}{m}$. Sachant qu'on a l'autre inégalité, on obtient l'égalité et la convergence.

(c)

4. Notons $\mathscr{A}_n$ l'ensemble des chemins simples issus de $(0,0)$ de longueur $n+1$.

→ Tout d'abord, l'ensemble des suites $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ telles que $x_0 = (0,0)$ et, pour $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, $x_{k+1} - x_k \in \{(1,0),(0,1)\}$, est une partie de $\mathscr{A}_n$ de cardinal 2^n, tandis que le nombre total de n-chemins issus de $(0,0)$ est égal à 4^n, on a $2^n \leqslant A_n \leqslant 4^n$

→ L'application qui à $x \in \mathscr{A}_{n+m}$ associe le couple $(y,z) \in \mathscr{A}_n \times \mathscr{A}_m$, où

$$\forall k \in [\![0,n]\!], y_k = x_k, \quad \forall k \in [\![0,m]\!], z_k = x_{n+k} - x_n$$

est clairement bien définie et injective. Donc $A_{n+m} \leqslant A_n A_m$ et la suite $(\ln(A_n))_n$ est sous-additive. De plus, d'après le premier point, $2 \leqslant \frac{\ln(A_n)}{n} \leqslant 4$. D'après les parties précédentes, la suite $\left(\frac{\ln(A_n)}{n}\right)_n$ converge vers un certain $\gamma \in [2,4]$.

→ Enfin, on peut écrire, pour tout $t > \gamma$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(A_n)}{n} - t = \gamma - t < 0$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(A_n) - nt = \lim_{n\to+\infty} \ln \frac{A_n}{t^n} = -\infty.$$

Par composition de limites avec l'exponentielle, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{A_n}{t^n} = 0$ et $A_n = o(t^n)$. On montre l'autre limite de la même manière.