CHAPITRE 3 - CALCUL D'INTÉGRALES

Exercice 3.1

on donne simplement une primitive (ajouter une constante)

a) $\frac{1}{2}x^2\arctan(x)-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\arctan(x)$ sur $\mathbb{R}$
b) $\frac{1}{2}\left(1+x^2\right)(\arctan x)^2-x\arctan(x)+\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$ sur $\mathbb{R}$
c) $-\frac{1}{5}\sin x\cos^4 x+\frac{1}{15}\cos^2 x\sin^2 x+\frac{2}{15}\sin x$. sur $\mathbb{R}$
d) $\frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^x\sqrt{6}\right)$ sur $\mathbb{R}$
e) $e^x(2x^2-3x+4)$ sur $\mathbb{R}$
f) $\frac{e^{3x}}{10}(\cos x+7\sin x)$ sur $\mathbb{R}$
g) $\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\arctan(x)$ sur $\mathbb{R}$
h) $\frac{1}{5}\operatorname{sh}x\sin(2x)-\frac{2}{5}\operatorname{ch}x\cos(2x)$ sur $\mathbb{R}$
i) $2\ln(1+\sqrt{x})$ sur $\mathbb{R}_+^*$
j) $\arcsin(x-1)$ sur $]0,2[$
k) $\frac{1}{5}\ln|x+2|-\frac{1}{10}\ln(x^2+2x+5)+\frac{1}{10}\arctan\frac{x+1}{2}$ sur $]-\infty,-2[$ et sur $]-2,+\infty[$
l) $\frac{1}{2(a^2-b^2)}\ln\left(\frac{x^2+b^2}{x^2+a^2}\right)$
m) $\sqrt{x^2-5x+6}+\frac{9}{2}\ln\left|2x-5+2\sqrt{x^2-5x+6}\right|$ sur $]-\infty,2[$ et $]3,+\infty[$

Exercice 3.2

a) $\ln 2-2+\frac{\pi}{2}$ par intégration par parties.
b) $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ par changement de variable « $u=\tan(x/2)$ ».
c) $\frac{\pi(b-a)^2}{8}$ mise sous forme canonique et changement de variable pour se ramener à $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2}\mathrm{d}u$ puis changement de variable « $u=\sin t$ » (ou les deux en une seule fois) - on peut aussi l'interpréter comme l'aire d'un demi cercle de diamètre $b-a$... mais est-ce une preuve ?

Exercice 3.3

La fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. On travaille sur un intervalle contenu dans cet ensemble. On intègre par parties pour a et x dans l'intervalle (C désigne une constante « générique » - ce n'est pas toujours la même)

$$I(x)=\int_a^x\frac{\ln\left(t^2+4t+5\right)}{(1+t)^2}\mathrm{d}t=-\frac{\ln\left(x^2+4x+5\right)}{x+1}+\int_a^x\frac{2t+4}{(t+1)\left(t^2+4t+5\right)}\mathrm{d}t+C$$

On décompose $\frac{2X+4}{(X+1)\left(X^2+4X+5\right)}$ en éléments simples :

$$\frac{2X+4}{(X+1)\left(X^2+4X+5\right)}=\frac{1}{X+1}-\frac{1+X}{X^2+4X+5}$$

et

$$I(x)=\ln|x+1|-\frac{\ln\left(x^2+4x+5\right)}{x+1}-\int_a^x\frac{t+1}{(t+2)^2+1}\mathrm{d}t+C$$

Pour terminer le calcul, posons $t+2=u$:

$$\int_a^x\frac{1+t}{(t+2)^2+1}\mathrm{d}t=\int_{a+2}^{x+2}\frac{u-1}{u^2+1}dt=\left[\frac{1}{2}\ln\left(u^2+1\right)-\arctan t\right]_{a+2}^{x+2}$$

D'où :

$$I(x)=-\frac{x+3}{2(x+1)}\ln\left(x^2+4x+5\right)+\ln|x+1|+\operatorname{Arctan}(x+2)+C$$

Exercice 3.4

les fonctions qui apparaissent sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1/2]$. Cela permet d'intégrer par parties :

$$\begin{aligned} I=\int_0^{1/2}\arctan\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x &= \left[x\arctan\sqrt{1-x^2}\right]_0^{1/2}+\int_0^{1/2}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}(1+1-x^2)}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\arctan\frac{\sqrt{3}}{2}+\int_0^{1/2}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}(2-x^2)}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

On effectue le changement de variable « $x=\sin u$ » ou « $u=\arcsin(x)$ » :

$$\int_0^{1/2}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}(2-x^2)}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^2 u}{2-\sin^2 u}\mathrm{d}u$$

Puisque l'expression « $\dfrac{\sin^2 u}{2-\sin^2 u}\mathrm{d}u$ » est invariante en remplaçant u par $u+\pi$, on peut effectuer le changement de variable $v=\tan u$. Cela donne, avec $\sin^2 u=\tan^2 u\cos^2 u=\dfrac{\tan^2}{1+\tan^2 u}$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^2 u}{2-\sin^2 u}\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{\dfrac{v^2}{1+v^2}}{2-\dfrac{v^2}{1+v^2}}\frac{1}{1+v^2}\mathrm{d}v=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{v^2}{(1+v^2)(2+v^2)}\mathrm{d}v$$

On décompose en éléments simples :

$$\frac{v^2}{(1+v^2)(2+v^2)}=\frac{2}{2+v^2}-\frac{1}{1+v^2}$$

et enfin

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{v^2}{(1+v^2)(2+v^2)}\mathrm{d}v=\sqrt{2}\arctan\frac{1}{\sqrt{6}}-\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}$$

On trouve alors

$$\int_0^{1/2}\arctan\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\arctan\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{2}\arctan\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{\pi}{6}$$

Exercice 3.5

- → si $x\leqslant 0$, alors $I(x)=\displaystyle\int_0^1 x\,dt=x$,
- → si $x\geqslant 1$, alors $I(x)=\displaystyle\int_0^1 t\,dt=\frac{1}{2}$,
- → si $x\in[0,1]$, alors

$$I(x)=\int_0^x t\,dt+\int_x^1 x\,dt=\frac{x^2}{2}+x(1-x)=x-\frac{x^2}{2}$$