CHAPITRE 2 - DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES

Exercice 2.1

$\rightarrow$ $F_1 = \dfrac{3X^2+X-2}{(X-1)^2(X+2)^2} = \dfrac{-17}{27(X+2)} + \dfrac{8}{9(X+2)^2} + \dfrac{17}{27(X-1)} + \dfrac{2}{9(X-1)^2}$

$\rightarrow$ $F_2 = \dfrac{3X+1}{(X+1)^2(X^2+X+1)} = \dfrac{-2}{(X+1)^2} + \dfrac{1}{X+1} + \dfrac{2-X}{1+X+X^2}$

$\rightarrow$ $F_3 = \dfrac{1}{X^4+1} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(\dfrac{X+\sqrt{2}}{X^2+\sqrt{2}X+1} - \dfrac{X-\sqrt{2}}{X^2-\sqrt{2}X+1}\right).$

Exercice 2.2

1. $\dfrac{1}{X(X+1)(X+2)} = -\dfrac{1}{X+1} + \dfrac{1}{2(X+2)} + \dfrac{1}{2X}$
2. $\dfrac{1}{X(X^2+1)} = \dfrac{1}{X} - \dfrac{X}{X^2+1}.$
3. $\dfrac{1}{X^3+1} = \dfrac{-X+2}{3(X^2-X+1)} + \dfrac{1}{3(X+1)}.$
4. $\dfrac{2X+1}{(X^2-X)^2} = \dfrac{1}{X^2} + \dfrac{4}{X} + \dfrac{3}{(X-1)^2} - \dfrac{4}{X-1}.$
5. $\dfrac{X^4-1}{X^2(X+1)} = X-1+\dfrac{1}{X} - \dfrac{1}{X^2}.$
6. $\dfrac{X^4}{(X+1)(X^2-1)} = X-1+\dfrac{1}{4(X-1)} + \dfrac{7}{4(X-1)^2} - \dfrac{1}{2(X+1)^2}.$
7. On applique la formule générale de décomposition. On a $Q(X) = X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(X-\omega_k)$ avec $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$ et $Q'(\omega_k) = n\omega_k^{n-1} = \dfrac{n}{omega_k}$ car $\omega_k^n = 1$. On en déduit
$$\frac{1}{X^n-1} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\omega_k}{X-\omega_k}.$$

Exercice 2.3

Si on note $F = \dfrac{P'}{P}$, alors on a $F' = \dfrac{P''P - P'^2}{P^2}$. On va donc s'intéresser à cette fraction rationnelle. Si
$$P = A.\prod_{i=1}^{d}(X-x_i)^{n_i}$$
alors
$$P' = A.\sum_{i=1}^{d}\left(n_i(X-x_i)^{n_i-1}\prod_{j\neq i}(X-x_j)^{n_j}\right)$$
et
$$F = \sum_{i=1}^{d}\frac{n_i}{X-x_i}$$
Enfin $F' = -\sum_{i=1}^{d}\dfrac{n_i}{(X-x_i)^2}$. Lorsque x n'est pas une racine de P, alors $F'(x) < 0$ et $P(x)P''(x) < P'^2(x)$. Si x est racine de P alors $P(x)P''(x) = 0 \leqslant P'^2(x)$.

Exercice 2.4

On décompose en éléments simples la fraction rationnelle $F(X) = \dfrac{1}{P(X)}$. Les pôles de F sont les x_i et ils sont tous simples par hypothèse. Puisque la partie entière de F est nulle on a
$$F(X) = \frac{1}{P(X)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\prod_{k\neq i}(x_i-x_k)}\frac{1}{X-x_i} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{P'(x_i)(X-x_i)}.$$
L'identité demandée s'obtient en évaluant cette égalité en 0. Pour calculer la somme $\sum_{i=1}^{n_i}\dfrac{1}{P'(x_i)}$, on multiplie l'égalité précédente par X, on évalue en x réel et on fait tendre x vers l'infini : $\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{P'(x_i)}$ vaut 1 si $n=1$ et 0 si $n>1$