CHAPITRE 1 - NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1.1

On a $|z+z'|^2=(z+z')\overline{(z+z')}=|z|^2+[z'|^2+2\mathrm{Re}(z\overline{z'})$ et $|z-z'|^2=|z|^2+[z'|^2-2\mathrm{Re}(z\overline{z'})$. On somme, ce qui donne le résultat.

Exercice 1.2

On exclut les cas particuliers où l'un des deux est nul (le résultat est vrai). En élevant au carré, la relation équivaut à $|z+z'|^2=|z|^2+|z'|^2+2|zz'|$ (tout est positif). En utilisant $|a|^2=a\overline{a}$, on obtient

$$|z+z'|^2=(z+z')(\overline{z}+\overline{z'})=|z|^2+|z'|^2+z\overline{z'}+\overline{z}z'=|z|^2+|z'|^2+2\mathrm{Re}(z\overline{z'}).$$

On a $2\mathrm{Re}(z\overline{z'})\leqslant 2|z\overline{z'}|=2|z||z'|$ et ainsi $|z+z'|^2\leqslant|z|^2+|z'|^2+2|z|.|z'|=(|z|+|z'|)^2$ (on simplifie les carrés car tout est positif).
On a l'égalité si, et seulement si $\mathrm{Re}(z\overline{z'})=|zz'|$. Puisque $|z'|=|\overline{z'})|$, l'égalité est équivalente à $\mathrm{Re}(z\overline{z'})=|z\overline{z'}|$, ce qui est vrai si, et seulement si $z\overline{z'}\in\mathbb{R}^+$. On note $k\in\mathbb{R}^+$ ce réel. Puisque z' est non nul, $z\overline{z'}=k\Leftrightarrow zz'\overline{z'}=kz'$ et $z=\dfrac{k}{|z'|^2}z'$ (et même puisque $k=|zz'|$, on a $z=\dfrac{|z|}{|z'|}z'$).

Exercice 1.3

On suppose $n\neq 0$. On factorise $z^2+1=(z+i)(z-i)$, ce qui donne l'équation équivalente

$$(z+i)^n\left((z-i)^n-(z+i)^n\right)=0.$$

On a la solution $z=-i$. Pour $z\neq -i$, l'équation équivaut à $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n=1$. Cela équivaut à l'existence de $k\in\mathbb{Z}$ tel que $\frac{z-i}{z+i}=e^{2ik\pi/n}$. Pour k multiple de n, il n'y a pas de solution sinon

$$z=i\frac{1+e^{2ik\pi/n}}{1-e^{2ik\pi/n}}=i\frac{2\cos(k\pi/n)}{-2i\sin(k\pi/n)}=-\mathrm{cotan}\,(k\pi/n).$$

Exercice 1.4

Plusieurs moyens pour le faire :

→ On effectue une récurrence sur n le nombre de termes de la somme. Soit $\mathscr{P}(n)$: « si $z_1,\dots,z_n$ sont des complexes tels que $\left|\sum_{i=1}^n |z_i\right|=\sum_{i=1}^n|z_i|$ alors il existe $z\in\mathbb{C}$ et des réels positifs $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ tels que $z_i=\lambda_i z$ ».
- La proposition est vraie pour $n=2$.
- Soit $n\geqslant 2$ tel que $\mathscr{P}(k)$ est vraie jusqu'au rang n. On considère $n+1$ complexes non nuls (sinon on se ramène à un nombre de termes inférieur) vérifiant l'égalité. On a alors

$$\begin{aligned}|z_1|+\dots+|z_n|+|z_{n+1}| &= |(z_1+\dots+z_n)+z_{n+1}|\leqslant|z_1+\dots+z_n|+|z_{n+1}|\\ &\leqslant |z_1|+\dots+|z_n|+|z_{n+1}|,\end{aligned}$$

et ainsi, d'une part $|z_1+\dots+z_n|=|z_1|+\dots+|z_n|$ et d'autre part z_{n+1} et $z_1+\dots+z_n$ sont sur la même demi-droite complexe. On applique la propriété de récurrence qui donne $z_i=\lambda_i z$ pour $i=1,\dots,n$. Alors $z_1+\dots+z_n=(\lambda_1+\dots+\lambda_n)z$ avec $\lambda=\lambda_1+\dots+\lambda_n>0$ (tous strictement positifs). Puisque z_{n+1} est sur la même demi droite, on a $z_{n+1}=\lambda_{n+1}z$.
- Par récurrence, le résultat est vrai pour tout $n\geqslant 2$.

→ On écrit $z_k=r_ke^{i\theta_k}$ avec $r_k\geqslant 0$. On a

$$|z_1+\dots+z_n|^2=(z_1+\dots+z_n).\left(\overline{z_1}+\dots+\overline{z_n}\right)$$

On a, si $j\neq k$, $z_j\overline{z_k}+z_k\overline{z_j}=2r_jr_k\cos(\theta_j-\theta_k)\leqslant 2r_jr_k$ avec égalité si et seulement si $\theta_j\equiv\theta_k[2\pi]$. On a alors

$$|z_1+\dots+z_n|^2=\sum_{j=1}^n|z_j|^2+2\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}2r_jr_k\cos(\theta_j-\theta_k)\leqslant\sum_{j=1}^n|z_j|^2+2\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}2r_jr_k=(|z_1|+\dots+|z_n|)^2$$

avec égalité si et seulement si tous les $\cos(\theta_j-\theta_k)$ valent 1, donc si et seulement si $\theta_j\equiv\theta_k[2\pi]$ pour chaque $j\neq k$. On en déduit le résultat.

Exercice 1.5

→ On peut le faire analytiquement : on a $|z|=1$ donc il existe $\theta\in\mathbb{R}$ tel que $z=e^{i\theta}$. La seconde relation $|z+1|=1$ donne $|1+e^{i\theta}|=1$. Or $1+e^{i\theta}=2e^{i\theta/2}\cos(\theta/2)$. L'équation équivaut donc à $|\cos(\theta/2)|=1/2$ ce qui équivaut à l'existence d'un entier $k\in\mathbb{Z}$ tel que $\theta/2=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $\theta/2=\pm2\frac{\pi}{3}+2k\pi$. Finalement, cela équivaut à $\theta=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ et $z=j$ ou $z=\overline{j}$.

→ On le fait plus simplement géométriquement : les complexes sont ceux qui sont à l'intersection des cercles $C(O,1)$ et $C(A,1)$ où A est le point d'affixe -1. On retrouve les points intersection du cercle $C(O,1)$ et de la médiatrice de $[OA]$ (droite d'équation $x=-1/2$). Cela redonne j et $\overline{j}$.

Exercice 1.6

$$\frac{1+z}{1-z}=\frac{(1+z)(1-\bar{z})}{(1-z)(1-\bar{z})}=\frac{1-|z|^2+(z-\bar{z})}{|1-z|^2}.$$

Puisque $z-\bar{z}$ est imaginaire pur, $\frac{1+z}{1-z}\in\mathbb{R}$ si, et seulement si, sa partie réelle est nulle, c'est-à-dire $|z|=1$.

Exercice 1.7

→ On cherche sous la forme $z=a+ib$ (avec a,b réels). En élevant au carré et en prenant le module, on obtient les 3 équations :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a^2-b^2 & = & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ a^2+b^2 & = & 1 \\ 2ab & = & \frac{1}{\sqrt{2}}>0 \end{array}\right.$$

La résolution avec les deux premières équations donne les solutions $a=\pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $b=\pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. la troisième équation donne le signe et finalement les solutions

$$z_1=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}+i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\text{ et }z_2=-z_1$$

On a également $\frac{1\sqrt{2}}{+}i\frac{1}{\sqrt{2}}=e^{i\frac{\pi}{4}}$ donc $z_1=e^{i\frac{\pi}{8}}$ et z_2 l'opposé. Cela donne

$$\cos(\frac{\pi}{8})=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\text{ et }\sin(\frac{\pi}{8})=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

puis

$$\tan(\frac{\pi}{8})=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})^2}{4-2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1.$$

Exercice 1.8

1. On développe $(1+1)^n=U_n+V_n=2^n$ et $(1-1)^n=0=U_n-V_n$ ce qui donne $U_n=V_n=2^{n-1}$ si $n\geqslant 1$.
2. On utilise de nouveau la formule du binôme. Le principe est d'utiliser $j=e^{2i\pi/3}$ avec $j^3=1$ (pour faire apparaître une période de 3 dans les calculs) : $U_n+V_n+W_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=(1+1)^n=2^n$ avec également $(1+j)^n=U_n+jV_n+j^2W_n$ et $(1+j^2)^n=U_n+j^2V_n+jW_n$. Cela donne le système (avec $1+j=-j^2=e^{i\pi/3}$ et $1+j^2=-j=e^{-i\pi/3}$) :

$$\left\{\begin{array}{rcl} U_n+V_n+W_n & = & 2^n \\ U_n+jV_n+j^2W_n & = & e^{in\pi/3} \\ U_n+j^2V_n+jW_n & = & e^{-in\pi/3} \end{array}\right.$$

On obtient $U_n=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{n\pi}{3})\right)$, ainsi que (en faisant $L_1+j^2L_2+jL_3$), $V_n=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}\right)$ et $W_n=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{(n+2)\pi}{3}\right)$.

Exercice 1.9

On note S_n cette somme. On a

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\omega^{jk}\right)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(\omega^j)^k\right)$$

Si $\omega^j=1$ (c'est-à-dire $j=0$ ou $j=n$), la somme interne vaut n, sinon elle vaut $\frac{1-\omega^{jn}}{1-\omega^j}=0$. Il ne reste que les deux termes extrêmes. On a $S_n=2n$.

Exercice 1.10

1. → on peut calculer directement :

$$\begin{aligned} D_n(x) &= e^{-inx}\sum_{k=0}^{2n}e^{ikx}=e^{-inx}\frac{1-e^{i(2n+1)x}}{1-e^{ix}}=\frac{e^{-inx}}{e^{ix/2}}\frac{1-e^{i(2n+1)x}}{-2i\sin(x/2)} \\ &= \frac{e^{-i(n+1/2)x}-e^{i(n+1/2)x}}{-2i\sin(x/2)}=\frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)}. \end{aligned}$$

→ on peut simplifier en $D_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} 2\cos(kx)$ (c'est parfois donné sous cette forme). À l'aide de $2\cos a \sin b = \sin(a+b) - \sin(a-b)$, on a alors

$$\begin{aligned} D_n(x)\sin(x/2) &= \sin(x/2)\sum_{k=1}^{n}(\sin(k+1/2)x - \sin(k-1/2)x) \\ &= \sin(x/2) + \sin((n+1/2)x) - \sin(x/2) = \sin(n+1/2)x \end{aligned}$$

→ C'est reparti... on passe par $\sum_{k=0}^{n} e^{i(k+1/2)x}$ dont la partie imaginaire est la somme des sinus :

$$\sum_{k=0}^{n} e^{i(k+1/2)x} = e^{ix/2}\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} = e^{i(n+1)x/2}\frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}$$

Finalement $S_n(x) = \dfrac{\sin^2((n+1)x/2)}{\sin^2(x/2)}$.

Exercice 1.11

Deux solutions :

1. On note A, B et C les points d'affixe a, b et c. Le centre du cercle circonscrit à ABC est O (complexes de module 1), et le centre de gravité également. Ainsi le triangle est équilatéral. On a alors $b = aj$ et $c = aj^2$ (ou $c = aj$ et $b = aj^2$). Dans la première situation $a^2 + b^2 + c^2 = a^2(1 + j^2 + j) = 0$ (idem sinon).
2. On a $(a+b+c)^2 = 0 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$. On cherche à évaluer la valeur inconnue. On a $|a|^2 = 1 = a\bar{a}$, d'où $\bar{a} = 1/a$. Alors $\overline{a+b+c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc+ac+ab}{abc} = 0$. En conjuguant l'expression, on obtient $ab + ac + bc = 0$.

Exercice 1.12

Plusieurs solutions possibles

→ On résout le système, ce qui donne $c = -(a+b)$ et $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}$. Cette dernière équation devient $(a+b)^2 = ab$ ou $a^2 + ab + b^2 = 0 = b^2(t^2 + t + 1)$ où $t = \frac{a}{b}$. On en déduit que $a = jb$ ou $a = j^2 b$. Si $a = jb$, alors $c = j^2 b$. Les trois complexes sont de même module et on a $b = ja$, $c = j^2 a$. Sinon $b = j^2 a$ et $c = ja$.

→ L'équation $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ équivaut à $bc + ac + ab = 0$. Lorsqu'on développe $P = (X-a)(X-b)(X-c)$, on obtient

$$P = X^3 - (a+b+c)X^2 + (ab+ac+bc)X - abc$$

Ainsi a, b et c vérifient les conditions si et seulement s'ils sont les trois racines de $X^3 - abc$. En notant k un complexe tel que $k^3 = abc$, les complexes sont k, jk et $j^2 k$ (c'est-à-dire les trois racines cubiques de $abc = a^3$). Cela revient à dire que les trois complexes sont a, ja et $j^2 a$.

Exercice 1.13

→ On note $z_k = 1 - e^{2ik\pi/n}$. Alors $1 - z_k = e^{2ik\pi/n}$ et $(1-z_k)^n = 1$. On note $P_n = (1-X)^n - 1$. Les racines de P_n sont 0 et les z_k. Soit $Q_n = P_n/X$. Ce polynôme est de degré $n-1$ et ses racines sont $z_1, \ldots, z_{n-1}$. On a $Q_n = (-1)^n X^{n-1} + \ldots - n$. Le produit des racines vaut $(-1)^{n-1}\frac{-n}{(-1)^n} = n$.

→ On considère les polynômes $P = \prod_{k=1}^{n-1}\left(X - e^{2ik\pi/n}\right)$ et $Q = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - e^{2ik\pi/n}\right)$. D'après le cours, on a $Q = X^n - 1$. On aussi $Q = (X-1)P$. Cela donne $P = \frac{X^n - 1}{X-1} = \sum_{k=0}^{n-1} X^k$. Finalement on cherche $P(1) = n$.

Exercice 1.14

Évidemment a n'est pas entier donc le polynôme est de degré au moins 2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On développe $\cos(5\theta)$ ce qui donne

$$\cos(5\theta) = 16\cos^5(\theta) - 20\cos^3(\theta) + 5\cos(\theta).$$

Pour $\theta = \pi/5$, on obtient, en multipliant par 2, $-2 = a^5 - 5a^3 + 5a$. Le réel a est donc racine de $P = X^5 - 5X^3 + 5X + 2$. On remarque que -2 est racine de P. On factorise complètement P en $P = (X+2)(X^2 - X - 1)^2$. Puisque $a \neq -2$, on a a racine de $X^2 - X - 1$. On a notamment $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 1.15

On peut commencer par étudier la structure des sous-groupes de $\mathbb{U}$. C'est très proche de l'étude de la structure des sous-groupes de $\mathbb{R}$. En effet si on note $\tilde{G} = \{\theta \in \mathbb{R}, e^{i\theta} \in G\}$ alors $\tilde{G}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$, donc soit il est discret, soit il est dense. On peut supposer que $G \neq \{1\}$ et on pose $\theta_0 = \inf A$ où $A = \left\{\theta \in]0, 2\pi[, e^{i\theta} \in G\right\}$. Deux cas se présentent :

- → **Cas 1 :** $\theta_0 > 0$ (cela correspond au cas où $\tilde{G}$ est discret - on redémontre les propriétés) : on vérifie que $\theta_0 \in A$ et que G est le sous-groupe engendré par $e^{i\theta_0}$. De plus θ_0 est de la forme $x\pi$ avec $x \in \mathbb{Q}$. En effet si $\theta_0 \notin A$, il existerait $\theta_1 \in A$ tel que $\theta_0 < \theta_1 < 2\theta_0$, puis $\theta_2 \in A$ tel que $\theta_0 < \theta_2 < \theta_1 < 2\theta_0$ (par définition de la borne inférieure). On a alors $e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \in G$ avec $0 < \theta_1 - \theta_2 < \theta_0$ donc une contradiction. Si θ/π n'était pas rationnel alors le sous-groupe de $\mathbb{R}$ engendré par θ et 2π serait dense dans $\mathbb{R}$ et son image par $\varphi : t \mapsto e^{it}$ (continue) serait dense dans $\mathbb{U}$. On a donc $\theta_0 = \dfrac{p}{q}\pi$ avec $p \wedge q = 1$. Ainsi G est un sous-groupe fini de $\mathbb{U}$ et il donc de la forme $\mathbb{U}_m$
- → **Cas 2 :** $\theta_0 = 0$, $\tilde{G}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et G est dense dans $\mathbb{U}$.

On comprend l'énoncé géométriquement : Γ est l'intersection de G avec la boule ouverte de centre 1, de rayon $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Pour qu'il n'y ait pas d'éléments autres que 1, il faut que $\theta_0 \geqslant \frac{\pi}{4}$, ce qui revient à dire que G a au plus 8 éléments.
On a alors l'équivalence entre les points suivants :

- → on a $H \neq \{1\}$,
- → on a $H = G$ et $G \neq \{1\}$,
- → on a $\operatorname{card}(G) \geqslant 9$.

On vérifie alors aisément les points suivants :

- → si $m \leqslant 8$ alors Γ est réduit à $\{1\}$ et H aussi,
- → si $G = \mathbb{U}_m$ avec $m > 8$ alors Γ contient $e^{i\theta_0}$ qui engendre G. Donc $H = G$.
- → si G est dense dans $\mathbb{U}$, alors le sous-groupe de $\mathbb{U}$ engendré par H est infini (on a déjà une infinité d'éléments dans Γ et donc dense dans $\mathbb{U}$. Si $H \subsetneq G$. Soit $x = e^{i\theta} \in G \backslash H$. Il existe $\theta' \in]0, \frac{\pi}{4}[$ avec $e^{i\theta'} \in H$. Si on note k la partie entière de θ/θ', alors $\theta = k\theta' + r$ avec $|r - < \frac{\pi}{4}$. On a alors $e^{i\theta} = \left(e^{i\theta'}\right)^k e^{ir}$. On a $e^{i\theta'} \in H$ donc $\left(e^{i\theta'}\right)^k$ également et puisque $e^{ir} \in \Gamma$, $e^{ir} \in H$. On a donc $e^{i\theta} \in H$.

L'équivalence des trois points annoncés est prouvée.