Tout est fait dans E espace euclidien.

Adjoint

- définition et propriété de l'adjoint
- Matrice de u^* dans une base orthonormée.
- Écriture $\langle x, u(y)\rangle = X^T AY$ (dans une base orthonormée). Si F est stable par u, alors $F^\perp$ l'est par u^*.

Endomorphismes orthogonaux

- Endomorphismes orthogonaux (conservation de la norme et autres caractérisations)
- matrices orthogonales. Lien entre endomorphismes orthogonaux et matrices orthogonales dans une b.o.n. Groupes $O(E)$ et $SO(E)$.
- Propriétés : spectre, orthogonalité des espaces propres. Si F est stable alors $F^\perp$ aussi
- Classification en dimension 2 et 3 (symétrie, réflexion et rotation - pas d'étude systématique de la composée symétrie-rotation). Réduction en dimension n.

Endomorphismes symétriques

- Endomorphismes symétriques : définition, propriétés, matrice dans une base orthonormée.
- Orthogonalité des sev propres. Spectre réel.
- Réduction des endomorphismes symétriques dans une base orthonormée.
- Caractérisation des symétries orthogonales (symétriques et orthogonales)
- calcul de $\langle x, u(x)\rangle$ pour un endomorphisme symétrique. Matrices symétriques (définies) positives (et endomorphismes). Équivalence $X^T AX \geqslant 0$ et spectre positif. Cas défini positif et spectre dans $\mathbb{R}_+^*$.
- Étude de $A^T A$ (symétrique, positivité, noyau, image, rang)
- complément : existence et unicité de la racine carrée dans $S_n^+(\mathbb{R})$

Questions de cours

1/ Existence et unicité de l'adjoint d'un endomorphisme u.

2/ Différentes caractérisations des endomorphismes orthogonaux.

3/ Spectre et orthogonalité des sev propres pour $u \in O(E)$. Si F est stable par u alors $F^\perp$ aussi.

4/ Théorème de réduction d'un endomorphisme orthogonal en base orthonormée.

5/ Pour u symétrique : orthogonalité des sev propres, existence d'une valeur propre réelle.

6/ Diagonalisation d'un endomorphisme symétrique réel dans une base orthonormée (en admettant l'existence d'une valeur propre réelle).

7/ Étude de la matrice $A^T A$ (avec $A \in M_n(\mathbb{R})$) : symétrique, positive, noyau, rang et image