Espaces probabilisés

- Tribu sur un ensemble, propriétés. Espace probabilisable
- Probabilité sur un espace probabilisable. Espace probabilisé. Relations usuelles (complémentaire, continuité croissante et décroissante, réunion)
- Définition d'une probabilité sur un espace fini, sur un espace dénombrable (sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$).
- Probabilités conditionnelles. Formule des probabilités composées, probabilités totales (système complet d'événements au plus dénombrable, système quasi-complet d'événements), formule de Bayes.
- Événements indépendants (deux à deux et mutuellement pour une famille quelconque).

Probabilités - variables aléatoires discrètes

Toutes les variables aléatoires sont discrètes (même si ce n'est pas précisé partout).

- Variables aléatoires discrètes : définitions, v.a.d réelles, notations $(X \in A)$, $(X \leqslant x)$ ou $\{X \leqslant x\}$ et autres. Si X est une vad alors $f(X)$ également. Si $X \sim Y$, alors $f(X) \sim f(Y)$.
- Probabilité $\mathbb{P}_X$, loi d'une variable aléatoire.
- Couples de variables aléatoires, loi conjointe, loi marginale
- Indépendances d'une famille de variables aléatoires. Une fonction de certaines des v.a. est indépendante d'une fonction des autres si les v.a. sont indépendantes (et généralisation à plusieurs paquets)
- Espérance : définition dans le cas positif et le cas général (la famille $\{x\mathbb{P}(X = x)\}$ est sommable. Propriétés : théorème de transfert, si $|X| \leqslant Y$ et Y d'espérance finie alors X aussi, positivité, croissance, linéarité). Si X et Y sont indépendantes alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
- Moments d'ordre k. Existence des moments d'ordres inférieurs. Variance et propriétés. Covariance.
- Lois usuelles : Bernoulli, binomiale, géométrique (sur $\mathbb{N}^*$) et Poisson.
- Fonctions génératrice pour les vad à valeurs dans $\mathbb{N}$. Existence d'une espérance si et seulement si G_X' admet une limite finie en 1. Résultat similaire pour la variance. Fonction génératrice d'une somme de vad indépendantes. Cas des variables aléatoires usuelles.
- Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson (pas de condition du type « si $n \geqslant 30$ et $p\dots$ », simplement une limite).
- Inégalités de Markov, de Bienaymé-Tchebychev.
- Loi faible des grands nombres (v.a.d. de même loi avec moment d'ordre 2, deux à deux indépendantes).

Questions de cours

1/ théorème de continuité croissante : si (A_n) suite croissante d'événements alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$

2/ Construction d'une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ lorsque Ω est dénombrable.

3/ Probabilité conditionnelle : c'est une probabilité - formules associées (probabilités totales, composées...)

4/ définition de l'indépendance de 2, n, d'une famille quelconque d'événements. Si A et B sont indépendants alors $(\overline{A}, B)$, $(A, \overline{B})$, $(\overline{A}, \overline{B})$ aussi.

5/ Définition d'un vad sur un espace probabilisé à valeurs dans un ensemble E. Montrer que pour tout $A \subset E$, $(X \in A)$ est un événement. Composition avec une fonction (montrer que $f(X)$ est encore une vad).

6/ Montrer que $Z = (X, Y) : \Omega \to E \times F$ est une variable aléatoire discrète si et seulement si X et Y sont des vad.

7/ Définition de l'indépendance de deux vad. Montrer alors que $\mathbb{P}(X \in A \cap Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(X \in B)$.

8/ Définition de l'espérance. Montrer que si $|X| \leqslant Y$ avec $Y \in L^1$ alors $X \in L^1$.

9/ Fonction génératrice. Propriétés. Lien avec espérance et variance.