Révisions : espaces préhilbertiens réels

- Produits scalaires, formules de polarisation, Cauchy-Schwarz et cas d'égalité.
- Orthogonalité : parties orthogonales, orthogonal d'une partie, familles orthonormées
- Espaces euclidiens : existence d'une base orthonormée (méthode de Gram-Schmidt), expression norme/produit scalaire/coordonnées dans une base orthonormée, forme linéaire (théorème de Riesz en dimension finie
- $E = F \oplus F^{\perp}$ si F est de dimension finie, projections orthogonales. Distance à un sev de dimension finie.

Semaine précédente : Équations différentielles

- Solution d'une équation différentielle $x' = a(t)x + b(t)$ où $a \in \mathscr{C}^0(I, \mathscr{L}(F))$ et $b \in \mathscr{C}^0(I, F)$, interprétation en terme matriciel, en terme de systèmes d'équations différentielles,
- Problème de Cauchy, existence et unicité des solutions, dimension de l'ensemble des solutions,
- transformation d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n en une équation d'ordre 1.
- Cas d'un système à coefficients constants. Solutions $t \mapsto \exp(tA)X_0$. Solutions de $X' = AX + B(t)$ sous forme intégrale. Résolution pratique d'un tel système : réduction de la matrice ou calcul de $\exp(tA)$. Expression des solutions dans le cas d'une matrice diagonalisable à l'aide d'une base de vecteurs propres : $t \mapsto \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e^{\lambda_k t} X_k$.
- Révisions sur les équations d'ordre 1, expression intégrale des solutions de $x' = a(t)x + b(t)$, traduction en terme de problème de Cauchy.
- Équations d'ordre 2 :
  - théorème de Cauchy-Lipschitz - il faut être capable de donner la structure de l'ensemble des solutions et dire sur quels intervalles on peut donner sa dimension.
  - système fondamental de solutions, wronskien, variation des constantes.
  - Méthodes de résolution (seule la résolution par DSE reste au programme - changement de fonction et méthode de Lagrange, changement de variable vus mais non exigible).

Questions de cours

1/ $\{f \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R}), f^2 w$ intégrable sur $I\}$ est un espace vectoriel et produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_I f(t)g(t)w(t)\,dt$ avec w continue strictement positive sur I.

2/ Une famille orthogonale sans vecteur nul est libre. Une somme de sous-espaces vectoriels deux à deux orthogonaux est directe.

3/ Orthogonal d'une somme et d'une intersection de sous-espaces vectoriels. Cas général et cas euclidien.

4/ Si F est de dimension finie $F \oplus F^{\perp} = E$ et expression de $p_F(x)$.

5/ Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel de dimension finie.

6/ Énoncé du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire vectoriel (sans démo. mais avec le cadre exact). Détermination de la dimension de l'espace des solutions de l'équation différentielle $y' = a(x)y$ (cas vectoriel)

7/ Résolution de $X' = AX$ avec $A \in M_n(\mathbb{K})$ avec $\exp(tA)$. Expression des solutions lorsque A est diagonalisable.

8/ Wronskien de deux solutions pour les équations scalaires d'ordre 2, propriétés. Caractérisation d'un système fondamental de solutions.

9/ Méthode de variation des constantes pour les équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2. Application à la résolution de $y'' + y = f$.