Équations différentielles

Systèmes différentiels

- Solution d'une équation différentielle $x' = a(t)x + b(t)$ où $a \in \mathscr{C}^0(I, \mathscr{L}(F))$ et $b \in \mathscr{C}^0(I, F)$, interprétation en terme matriciel, en terme de systèmes d'équations différentielles,
- Problème de Cauchy, existence et unicité des solutions, conséquence sur la dimension de l'ensemble des solutions,
- transformation d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n en une équation différentielle (vectorielle) d'ordre 1.
- Cas d'un système à coefficients constants. Solutions $t \mapsto \exp(tA)X_0$. Solutions de $X' = AX + B(t)$ sous forme intégrale. Résolution pratique d'un tel système : réduction de la matrice ou calcul de $\exp(tA)$. Expression des solutions dans le cas d'une matrice diagonalisable à l'aide d'une base de vecteurs propres : $t \mapsto \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e^{\lambda_k t} X_k$.

Équations différentielles scalaires d'ordre 1 ou 2

- Révisions sur les équations d'ordre 1, expression intégrale des solutions de $x' = a(t)x + b(t)$, traduction en terme de problème de Cauchy.
- Équations d'ordre 2 :
  - théorème de Cauchy-Lipschitz - il faut être capable de donner la structure de l'ensemble des solutions et dire sur quels intervalles on peut donner sa dimension.
  - système fondamental de solutions, wronskien, variation des constantes.
  - Méthodes de résolution (seule la résolution par DSE reste au programme - changement de fonction et méthode de Lagrange, changement de variable vus mais non exigible).

Semaine précédente : fonctions de plusieurs variables

- Définition de la différentiabilité en un point (fonctions définies sur un ouvert U d'un evn de dimension finie E dans un autre F - notation $\mathrm{d}f_a$ ou $\mathrm{d}f(a)$ et éventuellement $f'(a)$). Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles dans une base. Lien avec la différentielle. Matrice Jacobienne. Dérivée de $f \circ \gamma$ où γ est un arc paramétré. Gradient. Différentielle de la composée.
- Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur U : la différentielle est continue. Caractérisation par la continuité des dérivées partielles dans une base (démo non exigible). Opérations sur les applications de classe $\mathscr{C}^1$: combinaisons linéaires, produit et inverse pour les fonctions à valeurs réelles (et produit $f.g$ avec l'une à valeurs vectorielles, l'autre réelles). Dérivées d'ordre supérieur, théorème de Schwarz (démo hors programme).
- Intégrale curviligne : $f(b) - f(a) = \int_0^1 \mathrm{d}f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt$. Cas où $\gamma(t) = a + t(b-a)$
- Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert connexes par arcs
- Exemples de résolution d'équations aux dérivées partielles d'ordre 1 et 2. Définition d'un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme entre deux ouverts (hors prog.) - pas de caractérisation avec la jacobienne. Cas particuliers du changement en coordonnées polaires.

Questions de cours

1/ Énoncé du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire vectoriel (sans démo. mais avec le cadre exact). Détermination de la dimension de l'espace des solutions de l'équation différentielle $y' = a(x)y$ (cas vectoriel)

2/ Résolution de $X' = AX$ avec $A \in M_n(\mathbb{K})$ avec $\exp(tA)$. Expression des solutions lorsque A est diagonalisable.

3/ Wronskien de deux solutions pour les équations scalaires d'ordre 2, propriétés. Caractérisation d'un système fondamental de solutions.

4/ Méthode de variation des constantes pour les équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2. Application à la résolution de $y'' + y = f$.

5/ Dérivée selon un vecteur, différentielle, dérivées partielles dans une base. Liens entre ces trois notions.

6/ Différentielle d'une composée d'applications différentiables.

7/ Dérivée de $t \mapsto f \circ \gamma(t)$ (γ courbe $\mathscr{C}^1$). Cas particuliers où $\gamma(t) = a + t(b - a)$, expression avec le gradient.