Fonctions de plusieurs variables

- Définition de la différentiabilité en un point (fonctions définies sur un ouvert U d'un evn de dimension finie E dans un autre F - notation $\mathrm{d}f_a$ ou $\mathrm{d}f(a)$ et éventuellement $f'(a)$). Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles dans une base. Lien avec la différentielle. Matrice Jacobienne. Dérivée de $f \circ \gamma$ où γ est un arc paramétré. Gradient. Différentielle de la composée.
- Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur U : la différentielle est continue. Caractérisation par la continuité des dérivées partielles dans une base (démo non exigible). Opérations sur les applications de classe $\mathscr{C}^1$: combinaisons linéaires, produit et inverse pour les fonctions à valeurs réelles (et produit $f.g$ avec l'une à valeurs vectorielles, l'autre réelles).
- Généralisation aux dérivées d'ordre supérieur, théorème de Schwarz (démo hors programme).
- Intégrale curviligne : $f(b) - f(a) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt$. Cas où $\gamma(t) = a + t(b-a)$
- Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert connexes par arcs (démonstration dans le cas convexe uniquement).
- Exemples de résolution d'équations aux dérivées partielles d'ordre 1. Définition d'un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme entre deux ouverts (hors prog.) - pas de caractérisation avec la jacobienne.

Semaine précédente : séries entières

- Généralités, rayon de convergence (lemme d'Abel et conséquences). Calcul du rayon de convergence (par la définition, comparaison, critère de d'Alembert, rayon de la série dérivée)
- Opérations : somme et produit.
- Continuité de la somme (variable réelle ou complexe). Théorème d'Abel radial (si $\sum a_n R^n$ converge alors la somme est continue en R).
- Séries entières d'une variable réelle : dérivée, intégrale. Les rayons de convergence d'une série et de ses dérivées/primitives sont égaux. Conséquences sur les coefficients.
- Fonctions DSE en 0 : définition, fonctions de référence. Justification à l'aide de la formule de Taylor. Recherche de solutions d'équations différentielles développables en série entière en 0. Calcul de DSE en 0.
- Sommation des séries entières (cas où $a_n = P(n)$ ou $P(n)/n!$) - utilisation de dérivations/intégrations, d'équations différentielles.
- Exemples d'utilisations (calculs de somme de séries, série génératrice)

Questions de cours

1/ Dérivée selon un vecteur, différentielle, dérivées partielles dans une base. Liens entre ces trois notions.

2/ Différentielle d'une composée d'applications différentiables.

3/ Dérivée de $t \mapsto f \circ \gamma(t)$ (γ courbe $\mathscr{C}^1$). Cas particuliers où $\gamma(t) = a + t(b-a)$, expression avec le gradient.

4/ Définitions équivalentes du rayon de convergence (avec $a_n z^n$ de limite nulle, bornée et de série absolument convergente)

5/ Les rayons de convergence d'une série entière et de sa série dérivée sont identiques.

6/ Convergence simple, uniforme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Conséquence sur la continuité.

7/ Définition d'un développement en série entière en 0. Unicité des coefficients.

8/ Développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ à l'aide d'une équation différentielle.